



国际机械工程先进技术译丛

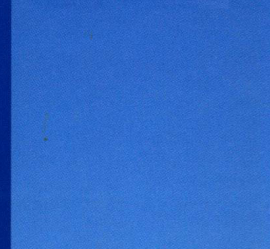
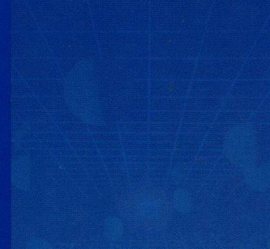
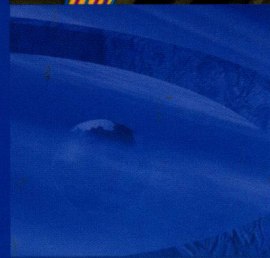
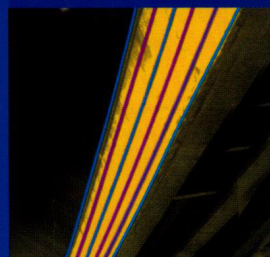
五轴数控铣床 切削加工 先进数值优化方法

Advanced Numerical Methods
to Optimize Cutting Operations
of Five Axis Milling Machines

(俄) Stanislav S. Makhanov 著
(泰) Weerachai Anotaipaboon 等译
曹岩 杨丽娜 杨艳丽



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



国际机械工程先进技术译丛

**Advanced Numerical Methods to
Optimize Cutting Operations of Five
Axis Milling Machines**

**五轴数控铣床
切削加工先进数值
优化方法**

(俄) Stanislav S. Makhanov

著

(泰) Weerachai Anotaipaiboon

曹 岩 杨丽娜 杨艳丽

译

白 瑀 杜 江 姚 慧



机 械 工 业 出 版 社

全书分为两部分：第一部分包括前3章，介绍五轴数控加工的基础知识，包括G代码编程、微分几何、刀具路径规划等；第二部分包括后4章，介绍五轴数控加工高级数值方法，包括网格生成、空间填充曲线、最短路径优化等。

本书可供高年级机械工程专业学生和研究生作为教材使用，也可供科研院所和企业的研究人员、工程人员以及加工技术人员参考，尤其对进行数控加工方面研究和应用的科研、技术人员具有参考价值。

Translation from the English language edition:

Advanced Numerical Methods to Optimize Cutting Operations of Five Axis Milling Machines

By Stanislav S. Makhanov and Weerachai Anotaiapaiboon

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

Springer is a part of Springer Science + Business Media

All Rights Reserved

著作权登记号：图字：01-2010-7528

图书在版编目 (CIP) 数据

五轴数控铣床切削加工先进数值优化方法/ (俄罗斯) 马哈诺夫 (Makhanov, S. S.), (泰) 安诺泰派布 (Anotaiapaiboon, W.) 著; 曹岩等译. —北京: 机械工业出版社, 2012. 11 (2013. 11 重印)

(国际机械工程先进技术译丛)

ISBN 978-7-111-39928-5

I. ①五… II. ①马…②安…③曹… III. ①数控机床-铣床-金属切削-加工工艺 IV. ①TG547

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 234532 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 李万宇 责任编辑: 李万宇

版式设计: 霍永明 责任校对: 常天培

封面设计: 鞠 杨 责任印制: 李 洋

三河市宏达印刷有限公司印刷

2013 年 11 月第 1 版第 2 次印刷

169mm × 239mm · 13.25 印张 · 2 插页 · 174 千字

2001—3000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-39928-5

定价: 49.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

策划编辑 (010) 88379732

社服务中心: (010) 88361066

网络服务

销售一部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010) 88379649

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

读者购书热线: (010) 88379203

机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

封面无防伪标均为盗版

译者序

柔性制造系统、集成制造系统、先进制造系统等的发展，逐步推动加工编程技术从基于曲线、曲面的交互式编程发展到基于加工特征的自动编程，再到基于知识的智能加工，大幅度提高了加工算法的质量和效率。数控（NC）加工编程技术的发展经历了多个阶段。目前，交互式图形编程是数控编程的主要模式，主要包括五个部分：交互工艺参数输入、刀具轨迹生成、刀具轨迹编辑、加工动态仿真和后置处理，而其中的刀具轨迹生成中的加工编程算法是计算机辅助制造（CAM）系统的核心，是其编程能力强弱的重要衡量指标。根据所适用的加工机床的不同，算法分为三坐标加工算法和多坐标（四、五坐标）加工算法。三坐标算法中的刀具轴线是固定的，近年来大量文章对其进行了深入研究，形成了参数线加工、等高线加工、投影线加工、曲面交线加工等成熟算法，并以加工模板的形式出现在商品化 CAM 软件中，在生产实践中取得了良好效果。本书作者基于丰富的 NC 加工经验，从实际应用的角度出发，利用典型实例，综合采用各种先进制造技术和方法，论述五轴铣床 NC 加工优化的关键技术和问题。

本书集实用性和先进性于一体，重点突出，实用性强，国内目前尚未发现同类型和同水平的图书，是当前提高多轴 NC 切削加工技术和水平急需的科技图书。

本书综合应用数值方法、微分几何、解析几何、实体建模、优化方法、机械工程、NC 编程等技术和方法，解决五轴铣床的 NC 加工刀具路径生成和优化问题。本书论述的方法不但能够解决五轴 NC 加工问题，也可以用于解决三轴和四轴的 NC 加工问题。本书在综述现代刀具路径优化方法的基础上可分为两部分：第一部分包括前 3 章，介

绍五轴数控加工的基础知识，包括 G 代码编程、微分几何、刀具路径规划等；第二部分包括后 4 章，介绍五轴 NC 加工高级数值方法，包括网格生成、空间填充曲线、最短路径优化等。

本书可供高年级机械工程专业学生和研究生作为教材使用，也可供科研院所和企业的研究人员、工程人员以及加工技术人员参考，尤其对进行数控加工方面研究和应用的科研、技术人员具有参考价值。

全书译文由西安工业大学曹岩统筹审稿，参加翻译的教师有曹岩、杨丽娜、杨艳丽、白瑀、杜江、姚慧。协助本书翻译和资料整理的研究生有雷蕾、闵慧、李常业、芦赞等。

本书得到西安工业大学专著基金的资助，译者在此表示衷心的感谢。由于时间及译者水平所限，错误之处在所难免，希望读者不吝指教。

译者

2012 年 9 月

序 言

多轴铣床的刀具轨迹生成和优化对于计算数学来说是一个新的应用领域。计算数学需要数值方法、微分几何、计算几何、实体成型、优化方法、机械工程和数控编程等知识。

本书介绍了一个计算框架来为刀具轨迹优化设计的有效算法。我们将其应用于五轴加工，但这些方法也可以应用于三轴或四轴机床。

本书前 3 章为概论，为读者介绍五轴切削必需的基础知识，例如 G 代码编程、微分几何和刀具轨迹规划等基本问题。可以将这几章作为大学生或研究生的计算机辅助制造课程框架内的五轴加工简介。

在后续章节中介绍的先进数值方法包括网格生成技术、空间填充曲线技术、最短路径优化技术和每种技术的分枝技术。这一部分可以被用于大学生、研究生以及企业的研究和开发。作者在设计、编制程序及检验五轴优化算法方面拥有第一手的经验。基于此经验，我们详细介绍了数值方法并提供了所有基本计算公式。此外，通过大量实际数值实例说明并分析这些方法，使读者能够理解、重构及编写其中的任何一个。

本书也包括当前的刀具轨迹优化方法回顾（130 篇文献），以及简短的关于网格生成和空间曲线的发展历史。

感谢 Erik Bohez、Mud-Ameen Munlin、Bert Lauwers 和 Than Lin 对于本书的有益的讨论和建议。

也要感谢泰国国家科技部、泰国国家电子与计算机技术中心和泰国研究基金，正是因为他们的赞助，我们才能够进行许多加工试验和测量。

Stanislav Makhanov

Weerachai Anotaipaboon

2006 年 12 月

目 录

译者序

序言

第 1 章 绪论	1
1.1 本书的目的和结构	1
1.2 CAD/CAM 格式	3
1.3 简短文献概述	4
1.3.1 刀具轨迹插补	5
1.3.2 适应性几何模式	7
1.3.3 刀具姿态和避免创削	11
参考文献	17
第 2 章 五轴数控加工简介	26
2.1 五轴数控加工的概念	26
2.2 数控加工程序	29
2.3 五轴机床的分类	37
2.4 五轴机床运动学	41
2.5 五轴加工实例	47
参考文献	53
第 3 章 刀具路径规划基本问题	55
3.1 表面表示	55
3.2 切屑宽度评估	57

3.2.1 平头刀切屑宽度计算	58
3.2.2 球头刀切屑宽度计算	62
3.3 最优刀具方向和避免过切	64
3.4 运动误差	67
3.5 刀具轨迹生成	71
参考文献	73
第4章 空间填充曲线的刀具路径	76
4.1 空间填充曲线的发展史及其应用	76
4.2 刀具路径的最优化	78
4.3 利用适应性空间填充曲线生成刀具路径	80
4.3.1 网格构造	81
4.3.2 空间填充曲线的生成	82
4.3.3 刀具路径更正	83
4.4 实例和讨论	87
参考文献	97
第5章 自适应曲线坐标系中的刀具路径	100
5.1 概述	100
5.2 网格生成的历史	101
5.3 为刀具轨迹优化生成变分网格	104
5.3.1 初步的例子	104
5.3.2 变分方法和函数	104
5.3.3 调和函数	113
5.3.4 刀具路径优化的例子	113
5.4 调和函数对刀具路径生成的应用	120
5.5 块结构化网格的空间填充曲线的生成	128
5.6 实例与讨论	130

参考文献	146
第 6 章 旋转最优	152
6.1 引言	152
6.2 运动学误差和角度变化	158
6.3 优化问题	160
6.4 优化问题的例子和实际加工	164
6.5 均匀角网格	173
6.6 均匀角网格的数值和加工试验	174
参考文献	180
第 7 章 五轴数控加工理论的最佳设置	182
7.1 引言	182
7.2 刀具轨迹分析	185
7.2.1 不变的参数	186
7.2.2 工件设定和刀具轨迹	187
7.3 最小二乘法优化和因变量	189
7.3.1 最小二乘法优化	189
7.3.2 因变量	190
7.4 实例和讨论	192
7.4.1 数值计算方法	192
7.4.2 实例	193
参考文献	199

第 1 章 绪 论

1.1 本书的目的和结构

在保持或者提高表面质量方面，目前大量的研究都集中在方法的改进和分析上，以此来减少从设计表面的计算机建模到机械加工这一过程所需要的时间。最重要的领域之一是数控加工的刀具路径规划。其主要目标是在允许的加工误差范围内获取可以产生高效的表面铣削的刀具位置和方向的数据。

由于五轴数控机床能够处理由木材、蜡、橡胶、金属、石材、塑料等原材料组成的几何形状复杂的工件，所以它正变得受欢迎起来。此外，现在的五轴数控机床还具有材料去除率高和表面光洁度好的特点。

通常，一台数控机床对设计表面的制造包括两个阶段，即粗加工和精加工。在粗加工过程中，原材料在确保不会有过度的切除或刨除（Excessive Cutting or Gouging）的情况下被尽可能快地被去除。在精加工过程中，刀具置于和加工表面的最大接触处，以去除剩下的多余材料并产生一个精密的表面。在精加工之后，剩余的不可避免地在加工面上产生的小皱褶（Scallops）必须通过人工表面研磨和抛光来去除。精加工和人工抛光要占总加工时间的 75%。另外，人工抛光容易产生误差和不符合要求的凹凸不平。

五轴加工比三轴加工在粗、精加工阶段的效率都高。在五轴加工中，刀具相对于工件的方向可以被两个额外的自由度控制，以此来达到更高的加工效率。基于这些优点，大量关于五轴加工的刀具路径规

划方法在本书中被提及和介绍。

第1章介绍最受欢迎的 CAD/CAM 数据格式并给出关于五轴加工优化的数学方法的一个简短的文献概述。这个概述的主要内容是刀具路径插补、刀具姿态的适应几何模式和方法以及避免刨削。

第2章向读者说明进行五轴加工所需要的基本知识。这一章中介绍和讨论 G 代码编程、简单形状的五轴加工示例和使用实体造型软件对切削过程进行验证。这一章可以用作计算机辅助设计 (CAD) 和计算机辅助制造 (CAM) 大学本科课程中关于五轴加工的简要介绍。

第3章介绍了涉及五轴加工中刀具路径优化概念所需要的理论。这一章介绍了一些基本问题,例如五轴机床的运动学、零件表面表达、切屑、刀具定位和过切,以及前向误差 (Forward Step Error)。同时,也讨论和分析了各种结构的五轴机床。大学生或研究生也可用这一章来对 CAD/CAM 作相关研究。

第4章和第5章介绍了基于适应几何模式的先进优化方案,即空间填充曲线 (SFC) 和适应性曲线网格。空间填充曲线刀具路径具有许多有吸引力的特点,例如局部地使用这种曲线能够使切削设备沿着最佳方向运动。此外,整个表面以一条轨迹切削,消除了刀具撤回的影响。适应性曲线网格概念的应用能够同时适应刀具轨迹上的点,这样可以产生更高效的之字形、螺旋线甚至空间填充曲线结构。空间填充曲线和适应性曲线网格的结合使得在具有复杂不规则边界、切断、凹陷、岛状的表面上允许有刀具路径。

三轴机床通常被看作三维绘图仪,然而五轴机床更像是一个大口径镗床,这就是为什么将三轴程序改为五轴程序不是一项简单的工作。特别地,旋转优化的思想似乎和三轴加工的观点完全不相关。因此,第6章介绍了对于五轴加工旋转优化的理论和实践,列出和讨论了几种基于最短路径技术的优化算法。

第7章介绍了一个理论,通过建立数值算法来减少由五轴铣床的初始安装带来的运动误差。初始安装包括和工作台及机床初始设置相

关的工件的位置和方向。已知一系列的刀具接触点和刀具方向，通过最小二乘优化法找出了最优安装参数。

1.2 CAD/CAM 格式

雕塑曲面或自由表面被广泛用于当今制造业，例如模具、铸型、航空航天和机动车零部件的生产等。这些曲面通常以复杂的几何形状和变化的曲率为特点。单个曲面通常由无数小块组成，这些小块用数学参数的形式来表现，例如 Bezier 曲面、B 样条和 NURBS。雕塑表面零部件的设计和制造是一个昂贵并且费时的过程。首先，设计曲面被转换成计算机模型（可以借助 CAD 程序）；然后，CAM 程序使用计算机模型产生指令来移动机床刀具，由此产生的一系列刀具位置和方向构成一条刀具路径来加工需要的表面。

每一个 CAD 或 CAD/CAM 软件都采用一种内部格式来表示和控制所需求的部件。当几何数据从一个 CAD 系统转移到另一个 CAD 或 CAM 系统时，采用一种中性的数据转移格式。其中最受欢迎的一种是 IGES（初始图形转换规范）格式（在文献 [40] 中有 IGES 格式的发展史）。IGES 格式支持由 NURBS（非均匀有理 B 样条）或者这些表示法的派生的表达形式所定义的曲面。初学者可以借助文献 [31] 来学习 NURBS，高级读者可以使用文献 [24, 98]。还有一些免费的程序库来控制 and 操作 NURBS，例如 NURBS + + 包^[1]和 NURBS 工具箱^[2]；另外还有一些免费的 IGES 文件处理工具被收集在 NIST/IGES 网页^[3]。

STL 文件最初被所谓的分层制造技术所使用，例如快速成型技术。由于描述零部件表面的简易性，STL 文件正变得越来越受欢迎。和采用 IGES 格式对于曲面的复杂描述相反，STL 格式将曲面作为三角形集合，每一个三角形由三个角的坐标和一个法向矢量来描述。由于许多成熟的三角部分算法的存在，这一技术为 CAD/CAM 的应用搭建了一个重要的平台。此外，曲面模型通常由许多小块组成。因此，通过拼

合这些小块以及产生三角形组群，可以采用许多成熟方法来处理交叉、裁剪、阴影、隐藏表面去除和刨削保护^[36]。通过将 STL 曲面^[85,115]切成薄片来获得轮廓，并根据产生的轮廓来执行加工。当然，将 NURBS 曲面切成薄片也是可以的，但需要更复杂的技术，例如文献 [81]。轮廓最后以 SLC 格式（详例见文献 [4]）保存。

其他受欢迎的 CAD/CAM 格式包括 STEP（产品数据交换标准）、DXF（AutoDesk 绘图转换格式）等。事实上，数据格式之间的差别产生了一个庞大的专门用于传输、转换和处理 CAD/CAM 文件的软件产业，例如在文献 [5] 或 [6] 中有 CAD/CAM 格式的兼容性表格。

1.3 简短文献概述

五轴加工刀具轨迹的最优化包含许多特点和多种标准，例如精确性、刀具轨迹长度加工时间、遗留凹坑的大小等，也包括避免刨削、满足主轴限制、最大化材料去除量和减少刀具损耗。最优化还会考虑切削过程中的热特性、刀具弯曲、振动、支承、工件定位和许多其他参数。标准包括机床或机床特殊部件的构造以及夹持机构的设计。对 1997 年之前的引文感兴趣的读者可以利用 Dragomatz 和 Mann^[25]的一份相当全面的概述。介绍了一些研究论文，这些论文是关于三轴和五轴加工的刀具轨迹和刀具定位几何学。包括：

- 1) 系统。
- 2) 等参数轨迹。
- 3) 不等参数轨迹。
- 4) 平面型腔轨迹。
- 5) 雕刻曲面型腔轨迹。
- 6) 粗加工轨迹。
- 7) 刀具定位。
- 8) 偏置表面方法。

- 9) 五轴加工。
- 10) 网格模型。
- 11) 像素和点模型。
- 12) 仿真和验证。

当然，以上内容有部分重叠，在这一项中涉及的技术可能在另一项中也涉及。例如，刀具轨迹生成系统可能包括以上提到的所有技术，粗加工轨迹可以用等参或不等参方法获得等。

这里的概述注重五轴加工，也包括三轴加工，前提是它们能够被扩展为五轴加工。除此之外，这里仅限于介绍利用刀具底部边缘加工零件表面的技术，例如平面端铣和圆角铣削。未包括五轴铣削（侧面铣削）和切入式铣削等那些令人感兴趣的方法。

本文关注以下几点：

- 1) 刀具轨迹插补。
- 2) 适应性几何模式。
- 3) 调整刀具姿态和避免刨削的方法。

我们相信，以上内容是进行五轴加工数值方法有效设计的最重要部分。

1.3.1 刀具轨迹插补

在计算机数控机床中，刀具移动是由一系列参考点控制的，这些点由伺服控制系统驱动。数控控制器使用线性插补技术^[66]或圆弧插补，圆弧插补可能导致各部分连接处的速度不连续。插补也可能会引起过高的加速度、后续表面不精确以及为消除它们而花费很长的加工时间。此外，现今高速加工要求进给率达到 40m/min，同时加速度达到 2g。在如此高的速度下，刀具轨迹中的很小不连续可能在参考轨迹中产生不希望要求的高频率谐频，这可能最终导致激发机械结构和伺服控制系统的固有振动模式。

虽然数控程序不能改变控制器移动机床部件的方式，但是用来加工曲线的刀具定位点和旋转角可以被改变，以此最小化或者至少减少

这些误差。生成一系列这种点的工作称作插补。早期的插补方式通过使刀具轨迹的拐角变平滑^[17]和使用低通滤波器^[126]来处理不连续问题。然而这一问题是由于弦长和弧长之间的差别引起的，这就是为什么靠增加弦长来生成刀具位置会导致进给率不稳定。因此，如果以弧长来参数化适当的曲线，这种类型的不精确可以被消除。因此，许多当前的插补方式致力于找到一种以弧长为参数的合适的多项式插补（例如 B 样条）。

不利的是，这种参数化法不能解析地处理常规的样条曲线，因此出现了许多近似解法。例如 Wang 和 Yang^[122]使用弦长和近似弧长参数化法并借助三次和五次样条函数生成了轨迹。Zhang 和 Greenway^[133]实现了基于 B 样条插补。五轴铣床工件和机床坐标系统之间的坐标变换成为插补的一部分^{[77,79][14]}。文献 [121] 中的解决方法包含额外的连续性冲击情况。

此外，机床刀具驱动的限制可能导致不能保持要求的进给率，该进给率可能导致刀具的碰撞和破损。因此，Weck 等^[125]实现了三次样条函数插补，其中进给率基于刀具驱动的物理限制，利用四阶加速度分布图获取光滑的过渡。Erkorkmaz 和 Altintas^[30]介绍了一种五次样条函数轨迹生成算法，产生连续的位置、速度和加速度分布图，通过给进给率的一阶和二阶导数施加约束来提供平稳的加速和减速。

1994 年，Farouki 和 Sakkalis^[33]引入 Pythagorean-Hodograph (PH) 曲线来解决三轴机床的进给控制问题。这一曲线为以上数控加工中提到的问题提供了一种计算简洁的解法，特别是弧长用曲线参数的多项式函数表示。文献 [32] 中，提出并分析结合 PH 曲线的二维 Hermite 插补。文献 [34, 35] 进一步发展了这一观点。众所周知，自从用 PH 曲线的多项式函数表示它的弧长以来，它们被成功地用于插补。因此，大量和 Hermite 型边界数据相匹配的平面 PH 曲线得到了发展（见文献 [61, 88, 119]）。

Muller 等^[90]介绍了一种解决五轴联动样条插补算法，这种算法用

样板等式法将 PH 插补和逆向运动学问题的分析方法结合在一起,结果是一个基于时间的样条。该样条能以高精确性表示所给的刀具轨迹。Langeron 等^[69]提出一种考虑了五轴机床运动学的多项式 B 样条插补。在工件坐标系中,刀具轨迹的 B 样条插补包括精度要求,同时以一种适合在 CAM 软件和数控单元之间交换的格式描述了一种五轴刀具路径。CAM 输出直接通过 B 样条曲线表示。Lo^[80]介绍了等参数、等粗糙度、等平面加工方法(见以下部分)的样条插补器。Sir 等^[118]介绍了基于样条曲线的二次曲线插补技术并将它们和 PH 曲线相比较,其中样条曲线由圆弧组成。

最后,大量论文介绍了高速铣削插补器。在高速加工中,由于机床刀具的物理限制和 CNC 控制器的程序段处理时间,实际平均进给率可能显著低于程序控制进给率。在很多情况下,机床刀具几乎不能达到制造者提供的最大进给率。当程序段处理时间比程序段执行时间长、当下一步移动需要的信息还未获取、但机床已经到达这个部分的终点时,这种情况就会发生。在这种情况下,目前的 CNC 会自动减少进给率并导致较长加工时间。这个相对新的问题在文献 [55, 64, 87, 109] 中有论述。

1.3.2 适应性几何模式

这部分概述的目的是构建适合标准的几何模式,这个标准可以作为刀具轨迹质量的评估,例如运动学误差、皱褶高度、底切、过切等。它也包括复杂型腔铣削方法,因为这需要特殊的几何模式。最终,几何模式的构建可能或者不能考虑实际机床运动学。很多情况下,对于三轴加工使用的模式,只需要某些修改就可以适合五轴加工。

最简单的刀具轨迹规划算法因其简洁和容易计算(见文献 [25, 108]),而采用结构化的之字形和螺旋形运动。之字形和螺旋形运动沿着一个坐标使用统一的步长,这个坐标将从零部件表面提取出的所需曲线参数化。早期的适应性方法取代了统一间隔,因为它用类推插补分配刀具定位点,这种插补具有可变步长。首先,轨迹被假设为线性

的；其次，所需曲线是近似的，例如用弧；再次，借助近似线和直线之间的偏离（见文献 [73]）选择向前步进，可以采用二分法或别的简易方法实现向前步进，在文献 [22, 73] 中介绍了一些这种观点的最新进展。

正如之前提到的，最受欢迎的几何解法是为单区域或多区域参数表面 $S(u, v)$ 构建的之字形和螺旋形等参数模式。本文中，等参数的意思是沿着一个 u 坐标在参数空间 $u-v$ 中生成之字形刀具轨迹，使用 v 坐标生成向前步进。

另一种方法是基于轮廓或等平面加工。这种情况下，刀具路径沿着参数表面和一系列垂直面的交叉曲线。首先讲述这一技术的论文有文献 [19, 104]。

这两种方法借助皱褶高度限制计算两条连续路径之间的最大许可距离。然而如果全部都用最大许可距离，即最小许可距离也来自于最大许可距离，这种方法就不能产生恒定的皱褶高度，加工效率就会受到限制。保持恒定皱褶高度的方法被称作等皱褶加工法，在文献 [76, 112] 中首先介绍。

Lo^[78] 发展了这些方法并把它应用到五轴加工。他的算法以参数范围内的初始曲线开始并计算偏置曲线，来使皱褶高度保持近似恒定。这种算法是为平头刀设计并有适当的倾斜，这一倾斜使切屑最大化。此算法还包括避免局部刨削。局部刨削指当刀具沿刀具轨迹运行时，刀具和所需表面之间的弯曲度不匹配而在刀具接触点（CC 点）附近产生的额外材料去除现象。Rao 和 Sarma^[103] 介绍了相似的适合低弯曲度以及被平头刀切削的表面的局部避免刨削算法。最后，Lo^[80] 介绍了一种球头刀的等皱褶刀具轨迹。

切屑的倾角和方向的评估会导致结构复杂的刀具轨迹拓扑结构。加工表面上每一个刀具位置处都存在至少一个使切屑最大化的方向。在参数空间 (u, v) 中标出的相应矢量构成了一个可以进一步分析的二维矢量域。通过每个点并沿着每个点的最佳方向的连续刀具轨迹就

是最佳刀具轨迹,它可以使全局切屑最大化。然而,由于生成的矢量域的复杂性,实际中很少能找到这样的轨迹。在文献[20]中列出了一种寻找较优解决方案的算法。作者引入一个具有最大平均切屑的“初始”刀具轨迹。接下来,许多文章探索了其他方法,例如等距离和等弯曲度方法(见文献[47])。文献[63]中在基本刀具轨迹上添加了一个附加的刀具轨迹部分,以此在整个加工区域获取连续切削力及避免振动。此外,生成适合型腔铣削的几何模式的需要导致产生了一系列方法,这些方法适用于内部具有一个或多个复杂“岛状”形状的零部件。当曲面边界是通过和其曲面的交叉界定时,此方法也适合加工这种所谓的裁剪曲面。

1998年,Choi和Jerard引入了一个术语“区域铣削”,它指加工操作在一个用边界曲线表示的区域中进行。根据文献[96],区域铣削使用相同类型的刀具轨迹拓扑来实现,即基于轮廓补偿型和方向平行型。在文献[45,46,49]中分析了方向平行型。

在基于轮廓加工中的最重要的问题之一是用一种方式连接轮廓,使刀具返回次数最少。Held等^[51]介绍了一种针对这种加工类型的算法,算法基于临近映射和Voronoi图。作者介绍了一个连接程序,它需要平面曲线图的一个生成树。Park和Chung^[95]提出了一个轮廓连接算法,它提供插削、刀具返回和钻孔的最小化。

Park等^[96]介绍了一种刀具轨迹算法,它保证达到“零次”刀具返回。算法采用刀具轨迹元素网概念,在父子关系中提供信息。Jeong和Kim^[57]介绍了一种算法,此算法使用Voronoi图在复杂形状区域中补偿边界曲线。每个曲线部分在相应的Voronoi多边形内被补偿,以避免退化问题。Jeong和Kim^[58]介绍了一种距离图算法,因为结果消除了圈、脊和尖等拓扑问题,此算法能有效找出特征点和补偿曲线部分的自交叉点。文献[68]中介绍了一种向前轨迹描绘方法,此算法寻找所有被平面曲线交叉打断的间隔,并将二维横向交叉映射为一维间隔。

假定零部件被分割为网格单元,每一个单元是一个曲线三角形或

曲线矩形。最优化可被看作构建一条路径，此路径访问每一个单元，没有交叉，要求最少量的刀具返回，并满足和标准相关的一些误差。文献 [97] 介绍了使用阶梯或窗口框架模式的型腔铣削。Hansen 和 Arbab^[46] 发展了一种扫描线算法来对任意形状的带“岛”形的平底型腔生成数控刀具轨迹。Bao 和 Yim 基于网格的平底型腔加工在文献 [11] 中介绍。

将刀具轨迹生成看作一个网格中的导航问题会产生探索最短路径优化和相关技术的一些方法。Suh 和 Shin^[110] 提出一种神经网络模型作为旅行商问题的一种解法，以此获得型腔粗加工的刀具轨迹。文献 [9] 中给出了这种策略的一个优良的数学分析。问题确切描述如下：给出参数平面中的一个区域以及刀具形状，找出刀具的一条最短路径/轨迹，使得沿此路径/轨迹区域内每一点都被刀具访问。此外，刀具必须被控制在一个特定的区域内。Narayanaswami 和 Choi^[91] 介绍了一种基于网格的三维导航方法来为三轴铣削线性插补以及线与圆联合插补生成数控刀具轨迹数据。此方法可被扩展用于五轴加工。

空间填充曲线（SFC）被用于计算机图形学、图像处理、信息系统中，也可被看作五轴轨迹获取的一种合适的导航模式。文献 [23, 44] 介绍了空间曲线对数控刀具轨迹生成的首次应用。Griffiths^[44] 提议将希尔伯特曲线作为一种刀具轨迹。而 Cox 等^[23] 使用各种形式的空间曲线，例如 Moore 曲线。Chen 等^[18] 建议了基于分形的技术。

然而，由于常规空间填充曲线所产生的大量的尖锐拐角，空间填充曲线或分形技术在五轴加工中从来没有受到欢迎。文献 [8] 提出了五轴数控加工刀具轨迹规划的适应性空间填充曲线概念，被用于局部最优加工方向的空间曲线会产生更短的刀具轨迹。此外，文献 [8] 中建议的刀具轨迹修正阶段可以消除标准空间填充曲线模式带来的尖角转折的影响。这些技术将在本书第 4 章中介绍。

最后，整个刀具轨迹可以在网格生成技术框架内考虑。这一概念由 Makhanov^[82] 首次介绍，并在文献 [15, 83] 中得到扩展。网格生成

技术出人意料地被很好地用于刀具路径优化。事实上,网格精化概念包含几乎所有刀具轨迹规划的要素,例如大量铣削误差区域的网格适应性、较容易地构建常规之字形和螺旋形的曲线描述、与刀具直径和凹坑高度相关约束的适应性。此外,和以局部误差评估为特征的标准技术相反,网格生成处理的是全局空间误差,因此同时适合所有 CL 点。这些观点在文献 [84] 中得到进一步发展,尤其是对五轴加工,而 Bieterman 及 Sandstrom^[12]独立地提出了一种类似的方法。最后, Sun 等^[111]介绍了一种用于刀具轨迹生成的网格获取算法的螺旋描述。五轴加工的先进网格生成技术将在本书第 5 章介绍。

1.3.3 刀具姿态和避免刨削

这一部分论述了能够在加工表面的特殊区域内提供最佳刀具位置和方向的技术。方向是重点,并和特定标准相关,例如局部避免刨削(过切)、切削带、皱褶高度、避免全局刨削限制等,进行了单独地论述。这些技术最重要的应用是用平面端铣或圆角铣削加工零件表面。

1987 年, Marciniak^[86]指出在五轴加工中,如果刀具在加工面上近似地沿着最小曲率移动,就可以获得加工面上的最大切削宽度。最大切削宽度依赖于接触点处的表面主曲率差异,这种观点在文献 [37, 67, 74] 中被提及。此外, Kruth 和 Klewais^[67]介绍了一种最佳铣削方向,它平行于具有最小曲率的表面的主方向。

Gani 等^[37]意识到五轴铣削最重要的问题之一是刀具关于加工表面的定位,以此在加工中避免过切或底切。因为这个问题,球头刀更受欢迎。当使用球头刀时,底切不会产生大问题。对于球头刀的数控刀具轨迹计算是表面补偿的一个重要问题。球头刀最主要的缺点是沿刀具半径方向变化的切削速度。刀具直径处达到最大切削速度,刀尖速度为零。这会导致切削刃破碎和糟糕的表面粗糙度。

回忆一下,对于五轴机床,刀具具有关于表面的五个自由度。三个空间自由度在刀具定位点处定位刀具,另外两个转动自由度用于建立刀具方向。刀具方向由倾角和摆角(见文献 [103])或倾角和偏

角^[60]来表示。这些角是在由进给方向、曲面法线和相应的交叉乘积矢量定义的局部坐标系中计算的。就平面端铣来说，作为刀具圆柱的一部分的刀具底面边界被称作刀具的切削圆。有效切削形状（也作刀具扫掠部分）被定义为刀具底面对于进给方向在平面法线的投影。实际上，就平面端铣来说，被投影的底部边线变成了一个椭圆，它被称作有效切削椭圆。椭圆的参数依赖于刀具方向。局部刨削（或曲率干涉）通常被定义为由于刀具切削边沿和需求表面的曲率不匹配，在刀具接触点附近产生的额外材料去除。查明和避免局部刨削包括将有效切削形状的曲率（也称作有效切削曲率）和有效切削形状被定义处的表面法向曲率相比较。

如果有效切削曲率大于表面法向曲率，局部刨削就不会发生。文献 [129] 给出平头刀的有效切削形状的数学描述，圆端铣削在文献 [71] 中介绍。确定最小倾斜角可以避免刨削，最小倾斜角必须保证最大量的材料去除，即最大切削带。当然，因为曲率仅在一个部分被比较，刨削依然可能发生。为了消除误差源，Lee 和 Ji^[72] 建议比较两个面内的有效切削形状的曲率：沿刀具轨迹和刀具轨迹的法向。这两个有效切削曲率与各自的表面法向曲率相比较，倾斜角被计算作最大值。然而，当零件表面曲率半径在两个方向值为负而最大主曲率值为正时，此方法不适用于非凸曲面。这样，此方法产生了一个零倾斜。这一“故障”通常产生局部刨削。Lo^[78] 通过不断在所有方向检查刨削来解决这一问题，这些技术的发展和改进在文献 [8] 中介绍。

Li 和 Chen^[75] 写道：“不仅切入工件的刀体部分的参数，而且和刀具有关的设计表面区域的参数也需要研究。但是，正如它的名字一样，刀具定位点仅是刀具和设计表面上的普通点，仅基于其几何特征的任何方法不会获得最佳刀具位置。”换句话说，以上单独点刨削模型的精确度是不够的。这样，多点策略^[123,124,130] 被应用来进一步提高刀具定位的精确性。此外，Rao 和 Sarma^[103] 介绍了一种闭合式、坐标自由方法，以查明和消除局部刨削，用于使用平头刀的雕塑曲面五轴加工的

CC 点处。此方法是找出沿刀具轨迹在 CC 点处的刀具扫掠面的曲率。然后,在比较刀具扫掠面和设计表面的曲率时,通过抽样调查一组刀具轨迹上的点,这样局部刨削可以被查明和消除。Pottmann 等^[100]介绍了一种局部可铣性标准,它确保使用球头刀的三轴加工的全局可铣性(即,后部刨削和碰撞避免)。局部可铣性标准基于曲率匹配,在设计表面和刀具扫掠面之间 CC 点处的相切面使用 Dupin 标形。这一方法的五轴加工在文献 [131] 中介绍。

以上曲率匹配方法需要重复刨削检查和修正策略。为了避免使用重复刨削检查和修正算法,一些五轴刀具定位策略的目的是将刀具的切削几何和表面几何相匹配,例如三轴球头铣刀的主轴方法^[104],以当刀具沿进给方向倾斜时达到最宽切屑为前提的五轴弧线交叉方法^[42]。然后,对一个给定的进给方向,对沿刀具轨迹的每一个 CC 点计算刀具位置。刀具向量被限制位于倾斜面内。倾斜角围绕交叉向量计算,目的是找到刀具轴线关于交叉向量的最小倾斜角,在此处刀具接触表面上的另一个点并保持它本身和 CC 点的接触,不会刨削表面。

Gray 等^[43]对所谓的 $3\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 轴加工提出了五轴弧线交叉方法改进。这种加工类型的特点是有三个线性轴和两个临时锁定的旋转轴。旋转轴在整个加工中(导致一个固定的刀具方向)或在加工的一个特定部分被锁定。旋转轴由一个高精度的分度装置表示,它为五轴加工建立了一种简单的可选择方案。

应该注意,以上方法是基于单独点或几个接触点的特性,因此误差依然是不可避免的,例如在宽带材精密加工中。除此之外,为了获得更宽的切屑时,刀具的背面刨削表面就会发生所谓的后部刨削。当发现刨削时,刀具必须更加倾斜并再次检查刨削直到完成工件。二次检查和刨削消除可以使用文献 [41] 中介绍的滚球式方法来执行,其基本思想是沿着刀具轨迹滚动一个变半径的球,并在球的内部定位刀具。

Li 和 Chen^[75]提出了一种有趣的方法。刀具运动产生的包络面被离

散成无限的特性曲线。每一条曲线将准确地在工件上复制其自身，然后进行特征曲线分析来解决刀具定位问题。作者使用瞬时刀具定位误差概念，瞬时刀具定位误差利用刀具虚拟切削边沿。在优化算法中使用切屑的有效带宽。

最终，不论刀具方向如何，总存在伴随刀柄、夹具和机床其他部件与工件全局干涉可能性。还存在一种可能性，假定任意方向，刀具依然侧面铣削表面其他部分，这意味着表面的这一部分是不能接近的。Elber 和 Cohen^[28]写道：“容易获取性问题、检验刨削的能力及可能对加工表面甚至其他表面修正刨削的能力问题，显然是五轴加工的广泛应用的最主要干扰问题。”

实体造型系统提供了刀具轨迹离线仿真和验证。然而实体造型方法计算昂贵，使用所谓的构造实体几何仿真的成本和刀具移动数量的四次方成比例 $O(N^4)$ ^[16]。另一方面，实体模型可以检查局部和全局干扰，包括和夹持机构及机床部件的碰撞。表面加工的一个典型程序可能包含超过 10000 个刀具运动，因此，目前的实体造型研究关注于高效快速的算法来计算刀具扫掠体积，进行布尔运算从加工体去除交叉部分。Bohez 等^[16]对实体造型方案做了简单介绍，例如扩展的 Z 缓冲器算法^[52]、线图仿真方法^[59]等。

分割为要素和相应的数据结构是这些程序的最重要组成部分。Z 缓冲器结构^[7,113]、射线表示法^[56]、八叉树方法^[93,106]、K-D 树^[50]、BSP 树^[92]、Brep 索引、四面体网格和规则网格^[38]是这种空间分解技术的例子。就精确度、健壮性、数据结构和计算时间来说，每一种实体造型算法都有优点和缺点。然而，似乎 Z 缓冲器方案具有的数据结构简洁性、快速生成和更新零件模型的可能性，使许多商业 CAM 程序使用 Z 缓冲器算法或其衍生算法验证并优化数控代码。

最近的研究论文包括 Z 缓冲器技术的许多改进，例如加强的 Z 缓冲器模型^[107]、模板缓冲器^[16]、适应性深度缓冲器^[105]、Z 缓冲器方法的还原能力^[13]等。然而以上方法不是特定为全局干涉检查设计的。事

实上, 实体模型设想一种通用的切削, 它可能包括也可能不包括全局干涉。它需要数小时的仿真时间并可能需要操作者直观地检查可能的碰撞。

因此, 基于闭合式的数学解答或其近似值方法依然是有价值的, 使用可达性概念解析地处理全局刨削问题。在一个给定方向的一点的可达性定义如下: 如果在一个给定方向可以从一个几何实体中提取出一条射线, 它不和几何实体内部相交, 则属于这个几何实体的一点在此给定方向是可达的。

三轴加工的可达性问题可以用和刀具轴线共线的同一地点的隐藏面去除方法来解决^[26,53]。刀具具有有限的尺寸, 通过沿刀具半径偏置所有的检查面可以补偿这一事实。核实和修正三轴刀具轨迹的基于 Z 缓冲器的隐藏面去除技术是许多当代计算机辅助制造系统中的一个普遍应用。对于特定条件下的三轴加工来说, 局部刨削的消除包含完全的碰撞消除。

对于五轴加工, 如果所有轴的位置通过一个固定点, 如果工件表面的所有点可以从这个点来观察, 那么局部可铣性意味着必然包含全局可铣性^[99]。Wallner 和 Pottmann^[120]为普通工件介绍了一种全局可铣性原理。他们从不同方面分析了和工件相关的刀具位置的几种可能的构造: 刀具运动自由度、接触点和刀具位置之间的一致性、刀具和工件之间有害碰撞的存在或不存在。

Takeuchi 等^[114]介绍了一种使用反复试验方法计算无碰撞 CL 数据的方法。Morishige 等^[89]使用所谓的构形空间 (C-space) 技术生成光滑的、连续变化的刀具轨迹。构形空间是机器人技术的一般概念, 机械装置的构形被一系列值指定。例如通过指定和六个自由度相关的六个参数可以在空间中定位一个刚体。机械装置的构形空间是这些参数的空间, 构形空间中的一个点指定一个特定的构形。障碍也可以映射到构形空间, 通过分析障碍物附近的点可以在理论上推导出需要的无碰撞路径。然而, 虽然构形空间方法是直观的及吸引人的, 但它可能

导致计算上的难题。

可达性问题可被近似为一个更简单的可见性需求。如果在某一物体上有一个点,无穷远处有另一个点,存在一条直线连接两个点,这两个点不和物体相交,则物体上的点从无穷远处的点看是可见的。可见性是可达性计算的有用前导,因为对于某类刀具和探测器,可见性是可达性的一个必要条件。Elber 和 Cohen^[27]、Elber 和 Zussman^[29]、Woo^[127]获得了这一领域的影响深远的理论结果。随后的研究都注重于生成所谓的可见圆锥体。

Lauwers 等^[70]描述了一种多轴刀具轨迹生成软件,其中刀具方向被最优化,以此来避免机床碰撞同时使沿刀具路径材料去除率最大化。为了有效避免碰撞,刀具轨迹生成单元、后处理和机器仿真被集成为一个系统。Xu 等^[128]将机床限制、碰撞和刨削结合在一起来获得可行的无刨削刀具方向。Gian 等^[39]提出开放区域矢量场技术来快速找出带有空腔的零件的刀具轨迹和方向。2003 年, Balasubramaniam 等^[10]为五轴定位提出了解决方法,利用三角部分数据的可见性图来解释刀具的可达性。对精加工使用此可见性数据,作者说明在考虑机床限制、刀具倾斜和尖点高度限度时如何使用它获得全局无碰撞五轴精加工刀具轨迹。

Young 等^[132]介绍了一种新的叶轮粗加工参数方法,它能保持近似恒定的切削深度。初始刀具主轴被看作初始方向来确定切削刀具姿态,这样可以减少五轴机床刀具的旋转轴多样性。Hsueh 等^[54]提出通过两个阶段防止碰撞:第一阶段是在垂直于所得刀具轨迹的平面上获取倾角和无碰撞角的变化范围;其次,用一个从无碰撞刀具轴线变化范围获得的检查圆锥体进行二次碰撞检查,临近表面的交叉形成碰撞区域。

通过分析多轴 CNC 机床工作台上一个合适的雕刻表面定向, Radzevich 和 Goodman^[102]提出所谓的雕刻表面机械加工性的球面指示线。这一特征曲线说明在已知情况下雕刻表面是否是可以加工的。这

一理论连同多轴 CNC 机床工作台上的雕刻表面定向一起发展。

Radzevich^[101]介绍了一种方法,这种方法使我们能够找到对于已知设计的切削刀具来说不能达到的雕刻表面区域。此外,如果存在任何不能加工的区域,这一改进的方法都能使我们将雕刻表面再分为刀具可达和刀具不可达区域。

我们介绍了五轴加工的三个论题,即刀具轨迹插补器、可适应几何模式和刀具姿态及避免刨削方法。我们相信,以上过程对于构建有效的五轴加工数字方法是最重要的。

应该注意,用于刀具轨迹生成和验证的完整的软件系统目前是非常重要的。商业 CAD/CAM 系统,例如 Unigraphics、PowerMill、Catia、MasterCam,在某种程度上它们中的每一种都包括五轴功能。第2章将说明 Unigraphics 的实体建模特征是如何用于刀具轨迹仿真和验证。

最后,要向没有引用其著作的作者表示歉意,因为没有看到那些著作,所以在本书中没有引用。

参 考 文 献

- [1] The NURBS++ package, <http://libnurbs.sourceforge.net/index.shtml>.
- [2] NURBS Toolbox, <http://www.aria.uklinux.net/nurbs.php3>.
- [3] NIST/IGES, <http://www.nist.gov/iges/>.
- [4] .SLC file format, <http://www-rp.me.vt.edu/bohn/rp/SLC.html>.
- [5] CAD/CAM Software and File Format Compatibility Matrix, <http://www.cs.cmu.edu/People/unsal/research/rapid/cadcam.html>.
- [6] CAD File Formats, <http://www.actify.com/v2/products/Importers/formats.htm>.
- [7] Anderson, R. O. 1978. Detecting and eliminating collisions in NC machining. *Computer-Aided Design*, 10(4):231-237.
- [8] Anotaipaiboon, W. and Makhanov, S. S. 2005. Tool path generation for five-axis NC machining using adaptive space-filling curves. *International Journal of Production Research*, 43(8):1643-1665.
- [9] Arkin, E. M., Fekete, S. P., and Mitchell, J. S. B. 2000. Approximation algorithms for lawn mowing and milling. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 17(1-2):25-50.
- [10] Balasubramaniam, M., Sarma, S. E., and Marciniak, K. 2003. Collision-

- free finishing toolpaths from visibility data. *Computer-Aided Design*, 35(4):359–374.
- [11] Bao, H. P. and Yim, H. 1992. Tool path determination for end milling of non-convex shaped polygons. *NAMRI Transactions*, pages 151–158.
 - [12] Bieterman, M. B. and Sandstrom, D. R. 2003. A curvilinear tool-path method for pocket machining. *Journal of Materials Processing Technology*, 125(4):709–715.
 - [13] Blasquez, I. and Poiraudau, J.-F. 2004. Undo facilities for the extended z-buffer in NC machining simulation. *Computers in Industry*, 53(2):193–204.
 - [14] Bohez, E. L. J., Makhanov, S. S., and Sonthiermpoon, K. 2000a. Adaptive non-linear grid tool path optimization for 5-axis machining. *International Journal of Production Research*, 38(17):4329–4343.
 - [15] Bohez, E. L. J., Makhanov, S. S., and Sonthiermpoon, K. 2000b. Adaptive nonlinear tool path optimization for 5-axis machining. *International Journal of Production Research*, 38(17):4329–4343.
 - [16] Bohez, E. L. J., Minh, N. T. H., Kiatsrithanakorn, B., Natasukon, P., Ruei-Yun, H., and Son, L. T. 2003. The stencil buffer sweep plane algorithm for 5-axis CNC tool path verification. *Computer-Aided Design*, 35(12):1129–1142.
 - [17] Butler, J., Haack, B., and Tomizuka, M. 1988. Reference input generation for high speed coordinated motion of a two axis system. In *Symposium on Robotics, Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*, pages 457–470.
 - [18] Chen, C.-C. A., Juang, Y.-S., and Lin, W.-Z. 2002. Generation of fractal toolpaths for irregular shapes of surface finishing areas. *Journal of Materials Processing Technology*, 127(2):146–150.
 - [19] Chen, Y. D., Ni, J., and Wu, S. M. 1993. Real-time CNC tool path generation for machining IGES surfaces. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 115(4):480–486.
 - [20] Chiou, C.-J. and Lee, Y.-S. 2002. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 34(5):357–371.
 - [21] Choi, B. K. and Jerard, R. B. 1998. *Computer Aided Machining - the z-Map Way: Sculptured Surface Machining - Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
 - [22] Choi, Y.-K. and Banerjee, A. Tool path generation and tolerance analysis for free-form surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. in press.
 - [23] Cox, J. J., Takezaki, Y., Ferguson, H. R. P., Kohkonen, K. E., and Mulkay, E. L. 1994. Space-filling curves in tool-path applications. *Computer-Aided Design*, 26(3):215–224.
 - [24] De Boor, C. 2001. *A practical guide to splines*. Springer, New York, USA.
 - [25] Dragomatz, D. and Mann, S. 1997. A classified bibliography of literature on NC milling path generation. *Computer-Aided Design*,

- 29(3):239–247.
- [26] Elber, G. and Cohen, E. 1990. Hidden curve removal for free form surfaces. In *SIGGRAPH '90: Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 95–104.
 - [27] Elber, G. and Cohen, E. 1995. Arbitrarily precise computation of gauss maps and visibility sets for freeform surfaces. In *SMA '95: Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 271–279.
 - [28] Elber, G. and Cohen, E. 1999. A unified approach to verification in 5-axis freeform milling environments. *Computer-Aided Design*, 31(13):795–804.
 - [29] Elber, G. and Zussman, E. 1998. Cone visibility decomposition of freeform surface. *Computer-Aided Design*, 30(4):315–320.
 - [30] Erkorkmaz, K. and Altintas, Y. 2001. High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(9):1323–1345.
 - [31] Farin, G. E. 1999. *NURBS: From Projective Geometry to Practical Use*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA.
 - [32] Farouki, R. T. and Neff, C. A. 1995. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Mathematics of Computation*, 64(212):1589–1609.
 - [33] Farouki, R. T. and Sakkalis, T. 1994. Pythagorean-hodograph space curves. *Advances in Computational Mathematics*, 2(1):41–66.
 - [34] Farouki, R. T., Tsai, Y.-F., and Wilson, C. S. 2000. Physical constraints on feedrates and feed accelerations along curved tool paths. *Computer Aided Geometric Design*, 17(4):337–359.
 - [35] Farouki, R. T., Tsai, Y.-F., and Yuan, G.-F. 1999. Contour machining of free-form surfaces with real-time PH curve CNC interpolators. *Computer Aided Geometric Design*, 16(1):61–76.
 - [36] Flutter, A. and Todd, J. 2001. A machining strategy for toolmaking. *Computer-Aided Design*, 33(13):1009–1022.
 - [37] Gani, E. A., Kruth, J. P., Vanherck, P., and Lauwers, B. 1997. A geometrical model of the cut in five-axis milling accounting for the influence of tool orientation. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 13(10):677–684.
 - [38] Garcia-Alonso, A., Serrano, N., and Flaquer, J. 1994. Solving the collision detection problem. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(3):36–43.
 - [39] Gian, R., Lin, T., and Lin, A. C. 2003. Planning of tool orientation for five-axis cavity machining. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 22(1-2):150–160.
 - [40] Goldstein, B. L., Kemmerer, S. J., and Parks, C. H. 1998. A brief history of early product data exchange standards - NISTIR 6221. Technical report, National Institute of Standards and Technology.
 - [41] Gray, P. J., Bedi, S., and Ismail, F. 2003. Rolling ball method for 5-axis

- surface machining. *Computer-Aided Design*, 35(4):347–357.
- [42] Gray, P. J., Bedi, S., and Ismail, F. 2005. Arc-intersect method for 5-axis tool positioning. *Computer-Aided Design*, 37(7):663–674.
 - [43] Gray, P. J., Ismail, F., and Bedi, S. 2007. Arc-intersect method for $3\frac{11}{22}$ -axis tool paths on a 5-axis machine. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(1):182–190.
 - [44] Griffiths, J. G. 1994. Toolpath based on Hilbert’s curve. *Computer-Aided Design*, 26(11):839–844.
 - [45] Guyder, M. K. 1990. Automating the optimization of 2 1/2 axis milling. *Computers in Industry*, 15(3):163–168.
 - [46] Hansen, A. and Arbab, F. 1992. An algorithm for generating NC tool paths for arbitrarily shaped pockets with islands. *ACM Trans. Graph.*, 11(2):152–182.
 - [47] Hatna, A. and Grieve, B. 2000. Cartesian machining versus parametric machining: a comparative study. *International Journal of Production Research*, 38(13):3043–3065.
 - [48] Held, M. 1991a. A geometry-based investigation of the tool path generation for zigzag pocket machining. *The Visual Computer*, 7(5-6):296–308.
 - [49] Held, M. 1991b. *On the computational geometry of pocket machining*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.
 - [50] Held, M., Klosowski, J., and Mitchell, J. S. B. 1995. Evaluation of collision detection methods for virtual reality fly-throughs. In *proceedings Seventh Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 205–210.
 - [51] Held, M., Lukács, G., and Andor, L. 1994. Pocket machining based on contour-parallel tool paths generated by means of proximity maps. *Computer-Aided Design*, 26(3):189–203.
 - [52] Hook, T. V. 1986. Real-time shaded NC milling display. In *SIGGRAPH ’86: Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 15–20.
 - [53] Hornung, C., Lellek, W., Rehwald, P., and Straßer, W. 1985. An area-oriented analytical visibility method for displaying parametrically defined tensor-product surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2(1-3):197–205.
 - [54] Hsueh, Y.-W., Hsueh, M.-H., and Lien, H.-C. Automatic selection of cutter orientation for preventing the collision problem on a five-axis machining. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. in press.
 - [55] Hu, J., Xiao, L., Wang, Y., and Wu, Z. 2006. An optimal feedrate model and solution algorithm for a high-speed machine of small line blocks with look-ahead. *International Journal Advanced Manufacturing Technology*, 28(9):930–935.
 - [56] Huang, Y. and Oliver, J. H. 1995. Integrated simulation, error assessment, and tool path correction for five-axis NC machining. *Journal of Manufacturing Systems*, 14(5):331334.

- [57] Jeong, J. and Kim, K. 1999a. Generating tool paths for free-form pocket machining using z-buffer-based Voronoi diagrams. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(3):182–187.
- [58] Jeong, J. and Kim, K. 1999b. Generation of tool paths for machining free-form pockets with islands using distance maps. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(5):311–316.
- [59] Jerard, R. B. and Drysdale, R. L. 1989. Methods for geometric modeling, simulation and spacial verification of NC machining programs. In Wozny, M. J., Turner, J. U., and Pegna, J., editors, *Product modeling for computer-aided design and manufacturing*. Elsevier/North-Holland, New York, USA.
- [60] Jun, C.-S., Cha, K., and Lee, Y.-S. 2003. Optimizing tool orientations for 5-axis machining by configuration-space search method. *Computer-Aided Design*, 35(6):549–566.
- [61] Jüttler, B. 2001. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Mathematics of Computation*, 70(235):1089–1111.
- [62] Kang, J.-K. and Suh, S.-H. 1997. Machinability and set-up orientation for five-axis numerically controlled machining of free surfaces. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 13(5):311–325.
- [63] Kim, H.-C., Lee, S.-G., and Yang, M.-Y. An optimized contour parallel tool path for 2D milling with flat endmill. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. in press.
- [64] Ko, T. J., Kim, H. S., and Park, S. H. 2005. Machineability in NURBS interpolator considering constant material removal rate. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 45(6):665–671.
- [65] Kondo, M. 1994. Decomposition of complex geometry for a manufacturing application. *Computer-Aided Design*, 26(3):244–252.
- [66] Koren, Y. 1976. Interpolator for a computer numerical control system. *IEEE Transactions on Computers*, 25(1):32–37.
- [67] Kruth, J.-P. and Klewais, P. 1994. Optimization and dynamic adaptation of the cutter inclination during five-axis milling of sculptured surfaces. *Anal. CIRP*, 43(1):443–448.
- [68] Lai, Y.-L., Wu, J. S.-S., Hung, J.-P., and Chen, J.-H. 2006. A simple method for invalid loops removal of planar offset curves. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 27(11-12):1153–1162.
- [69] Langeron, J. M., Duc, E., Lartigue, C., and Bourdet, P. 2004. A new format for 5-axis tool path computation, using Bspline curves. *Computer-Aided Design*, 36(12):1219–1229.
- [70] Lauwers, B., Dejonghe, P., and Kruth, J. P. 2003. Optimal and collision free tool posture in five-axis machining through the tight integration of tool path generation and machine simulation. *Computer-Aided Design*, 35(5):421–432.
- [71] Lee, Y.-S. 1997. Admissible tool orientation control of gouging avoidance for 5-axis complex surface machining. *Computer-Aided Design*, 29(7):507–521.

- [72] Lee, Y.-S. and Ji, H. 1997. Surface interrogation and machining strip evaluation for 5-axis CNC die and mold machining. *International Journal of Production Research*, 35(1):225–252.
- [73] Li, F., Wang, X. C., Ghosh, S. K., Kong, D. Z., Lai, T. Q., and Wu, X. T. 1995. Tool-path generation for machining sculptured surface. *Journal of Materials Processing Technology*, 48(1):811–816.
- [74] Li, S. X. and Jerard, R. B. 1994. 5-axis machining of sculptured surfaces with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 26(3):165–178.
- [75] Li, Z. and Chen, W. 2006. A global cutter positioning method for multi-axis machining of sculptured surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(12-13):1428–1434.
- [76] Lin, R.-S. and Koren, Y. 1996. Efficient tool-path planning for machining free-form surfaces. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 118(1):20–28.
- [77] Lo, C. C. 1997. Feedback interpolator for CNC machine tool. *ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 119(4):587592.
- [78] Lo, C. C. 1999a. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 31(9):557–566.
- [79] Lo, C. C. 1999b. Real-time generation and control of cutter path for 5-axis CNC machining. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 39(3):471–488.
- [80] Lo, C. C. 2000. CNC machine tool surface interpolator for ball-end milling of free-form surfaces. *International journal of machine tools and manufacture*, 40(3):307–326.
- [81] Ma, W., But, W.-C., and He, P. 2004. NURBS-based adaptive slicing for efficient rapid prototyping. *Computer-Aided Design*, 36(13):1309–1325.
- [82] Makhanov, S. S. 1999. An application of variational grid generation techniques to the tool-path optimization of industrial milling robots. *Journal of Materials Processing Technology*, 39(9):1524–1535.
- [83] Makhanov, S. S., Batanov, D., Bohez, E., Sonthipaumpoon, K., Anotaipaiboon, W., and Tabucanon, M. 2002. On the tool-path optimization of a milling robot. *Computers & Industrial Engineering*, 43(3):455–472.
- [84] Makhanov, S. S. and Ivanenko, S. A. 2003. Grid generation as applied to optimize cutting operations of the five-axis milling machine. *Applied Numerical Mathematics*, 46(3-4):331–351.
- [85] Mani, K., Kulkarni, P., and Dutta, D. 1999. Region-based adaptive slicing. *Computer-Aided Design*, 31(5):317–333.
- [86] Marciniak, K. 1987. Influence of surface shape in admissible tool positions in 5-axis face milling. *Computer-Aided Design*, 19(5):233–236.
- [87] Monreal, M. and Rodríguez, C. A. 2003. Influence of tool path strategy on the cycle time of high-speed milling. *Computer-Aided Design*, 35(4):395–401.
- [88] Moon, H. P., Farouki, R. T., and Choi, H. I. 2001. Construction and

- shape analysis of PH quintic hermite interpolants. *Computer Aided Geometric Design*, 18(2):93–115.
- [89] Morishige, K., Takeuchi, Y., and Kase, K. 1999. Tool path generation using C-space for 5-axis control machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 121(1):144–149.
- [90] Müller, M., Erds, G., and Xirouchakis, P. C. 2004. High accuracy spline interpolation for 5-axis machining. *Computer-Aided Design*, 36(13):1379–1393.
- [91] Narayanaswami, R. and Choi, Y. 2001. NC machining of freeform pockets with arbitrary wall geometry using a grid-based navigation approach. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 18(10):708–716.
- [92] Naylor, B., Amanatides, J., and Thibault, W. 1990. Merging BSP trees yields polyhedral set operations. In *SIGGRAPH '90: Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 115–124.
- [93] Noborio, H., Fukuda, S., and Arimoto, S. 1989. Fast interference check method using octree representation. *Advanced robotics*, 3(3):193–212.
- [94] Park, S. C. and Choi, B. K. 2000. Tool-path planning for direction-parallel area milling. *Computer-Aided Design*, 32(1):17–25.
- [95] Park, S. C. and Chung, Y. C. 2002. Offset tool-path linking for pocket machining. *Computer-Aided Design*, 34(4):299–308.
- [96] Park, S. C., Chung, Y. C., and Choi, B. K. 2003. Contour-parallel offset machining without tool-retractions. *Computer-Aided Design*, 35(9):841–849.
- [97] Persson, H. 1978. NC machining of arbitrarily shaped pockets. *Computer-Aided Design*, 10(3):169–174.
- [98] Piegl, L. and Tiller, W. 1995. *The NURBS book*. Springer-Verlag, London, UK.
- [99] Pottmann, H. and Ravani, B. 2000. Singularities of motions constrained by contacting surfaces. *Mechanism and Machine Theory*, 35(7):963–984.
- [100] Pottmann, H., Wallner, J., Glaeser, G., and Ravani, B. 1999. Geometric criteria for gouge-free three-axis milling of sculptured surfaces. *ASME Journal of Mechanical Design*, 121(2):241–248.
- [101] Radzevich, S. P. 2005. A cutting-tool-dependent approach for partitioning of sculptured surface. *Computer-Aided Design*, 37(7):767–778.
- [102] Radzevich, S. P. and Goodman, E. D. 2002. Computation of optimal workpiece orientation for multi-axis NC machining of sculptured part surfaces. *ASME Journal of Mechanical Design*, 124(2):201–212.
- [103] Rao, A. and Sarma, R. 2000. On local gouging in five-axis sculptured surface machining using flat-end tools. *Computer-Aided Design*, 32(7):409–420.
- [104] Rao, N., Ismail, F., and Bedi, S. 1997. Tool path planning for five-axis machining using the principal axis method. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 37(7):1025–1040.

- [105] Roth, D., Ismail, F., and Bedi, S. 2003. Mechanistic modelling of the milling process using an adaptive depth buffer. *Computer-Aided Design*, 35(14):1287–1303.
- [106] Roy, U. and Xu, Y. 1999. Computation of a geometric model of a machined part from its NC machining programs. *Computer-Aided Design*, 31(6):401–411.
- [107] Sang-Kyu Lee, S.-L. K. 2002. Development of simulation system for machining process using enhanced Z map model. *Journal of materials processing technology*, 130-131:608–617.
- [108] Sarma, R. 2000. An assessment of geometric methods in trajectory synthesis for shape-creating manufacturing operations. *Journal of Manufacturing Systems*, 19(1):59–72.
- [109] Siller, H., Rodriguez, C. A., and Ahuett, H. 2006. Cycle time prediction in high-speed milling operations for sculptured surface finishing. *Journal of Materials Processing Technology*, 174(1-3):355–362.
- [110] Suh, S. H. and Shin, Y. S. 1996. Neural network modeling for tool path planning of rough cut in complex pocket milling. *Journal of Manufacturing Systems*, 15(5):295–304.
- [111] Sun, Y.-W., Guoa, D.-M., and Jia, Z.-Y. 2006. Spiral cutting operation strategy for machining of sculptured surfaces by conformal map approach. *Journal of Materials Processing Technology*, 180(1-3):74–82.
- [112] Suresh, K. and Yang, D. C. H. 1994. Constant scallop-height machining of free-form surfaces. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 116(2):253–259.
- [113] Takata, S. 1989. A cutting simulation system for machinability evaluation using a workpiece model. *Analys CIRP*, 38(1):417–420.
- [114] Takeuchi, Y., Shimizu, H., Idemura, T., Watanabe, T., and Ito, T. 1990. 5-axis control machining based on solid model. *Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, 56(1):111–116.
- [115] Tata, K., Fadel, G., Bagchi, A., and Aziz, N. 1998. Efficient slicing for layered manufacturing. *Rapid Prototyping Journal*, 4(4):151–167.
- [116] Vafaeseefa, A. and ElMaraghy, H. A. 1998. Accessibility analysis in 5-axis machining of sculptured surfaces. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 2464–2469.
- [117] Vaněček, Jr., G. 1991. BRep-Index: a multidimensional space partitioning tree. In *SMA '91: Proceedings of the first ACM symposium on Solid modeling foundations and CAD/CAM applications*, pages 35–44.
- [118] Šír, Z., Feichtinger, R., and Jüttler, B. 2006. Approximating curves and their offsets using biarcs and Pythagorean hodograph quintics. *Computer-Aided Design*, 38(6):608–618.
- [119] Šír, Z. and Jüttler, B. 2005. Constructing acceleration continuous tool paths using Pythagorean hodograph curves. *Mechanism and Machine Theory*, 40(11):1258–1272.
- [120] Wallner, J. and Pottmann, H. 2000. On the geometry of sculptured surface machining. In Laurent, P.-J., Sablonnière, P., and Schumaker, L. L., editors, *Curve and Surface Design*. Vanderbilt University Press,

- Nashville, USA.
- [121] Wang, F.-C. and Wright, P. K. 1998. Open architecture controllers for machine tools, Part 2: A real time quintic spline interpolator. *Journal of manufacturing science and engineering*, 120(2):425–432.
 - [122] Wang, F.-C. and Yang, D. C. H. 1993. Nearly arc-length parameterized quintic-spline interpolation for precision machining. *Computer-Aided Design*, 25(5):281–288.
 - [123] Warkentin, A., Ismail, F., and Bedi, S. 1998. Intersection approach to multi-point machining of sculptured surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 15(6):567–584.
 - [124] Warkentin, A., Ismail, F., and Bedi, S. 2000. Multi-point tool positioning strategy for 5-axis machining of sculptured surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 17(1):83–100.
 - [125] Weck, M., Meylahn, A., and Hardebusch, C. 1999. Innovative algorithms for spline-based CNC controller, production engineering research and development in germany. *Annals of the German Academic Society for Production Engineering*, VI(1):83–86.
 - [126] Weck, M. and Ye, G. H. 1990. Sharp corner tracking using the IKF control strategy. *Annals CIRP*, 39(1):437–441.
 - [127] Woo, T. C. 1994. Visibility maps and spherical algorithms. *Computer-Aided Design*, 26(1):6–16.
 - [128] Xu, X. J., Bradley, C., Zhang, Y. F., Loh, H. T., and Wong, Y. S. 2002. Tool-path generation for five-axis machining of free-form surfaces based on accessibility analysis. *International Journal of Production Research*, 40(14):3253–3274.
 - [129] Y.-S Lee, T.-C. C. 1996. Automatic cutter selection for five-axis sculptured surface machining. *International Journal of Production Research*, 34(4):977–998.
 - [130] Yoon, J.-H. 1997. Tool tip gouging avoidance and optimal tool positioning for 5-axis sculptured surface machining. *International Journal of Production Research*, 41(10):2125–2142.
 - [131] Yoon, J.-H., Pottmann, H., and Lee, Y.-S. 2003. Locally optimal cutting positions for 5-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 35(1):69–81.
 - [132] Young, H.-T., Chuang, L.-C., Gerschwiler, K., and Kamps, S. 2004. A five-axis rough machining approach for a centrifugal impeller. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 23(3-4):233–239.
 - [133] Zhang, Q. G. and Greenway, R. B. 1998. Development and implementation of a NURBS curve motion interpolator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 14(1):27–36.

第 2 章 五轴数控加工简介

2.1 五轴数控加工的概念

数字控制或数字控制（NC）机床根据从其处理装置获取的指令自动运行。在第二次世界大战不久之后，数控机床首次得到发展并能够以可靠的、重复的方式准确高效地生产大批量的需求零部件。早期的数控机床是通过穿孔纸带或穿孔卡片指令进给的。在 20 世纪 60 年代，数控机床大规模地被计算机数字控制（CNC）机床取代。计算机数字控制机床拥有一个计算机控制器，它能接受 G 代码指令（见 2.2 节）并驱动机床。

五轴数控铣床的特点是有三个直线移动轴和两个旋转轴。图 2.1

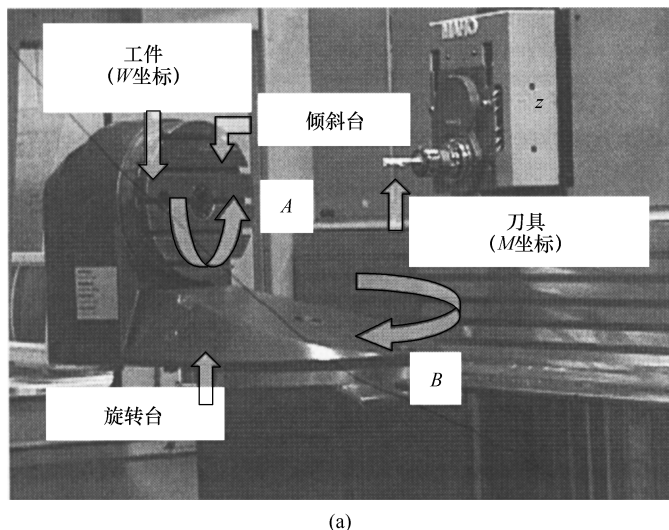


图 2.1 一个工作台上带有两个旋转轴的五轴铣床

(a) MAHO 600E 铣床

所示为一个工作台上带有两个旋转轴的五轴铣床。工件依靠夹具固定在工作台上（见图 2.1b），然后通过刀夹固定在主轴上的一个旋转刀具从表面去除材料。为生产出所需要的工业零部件而进行的材料去除过程被称为铣削、加工或切削。

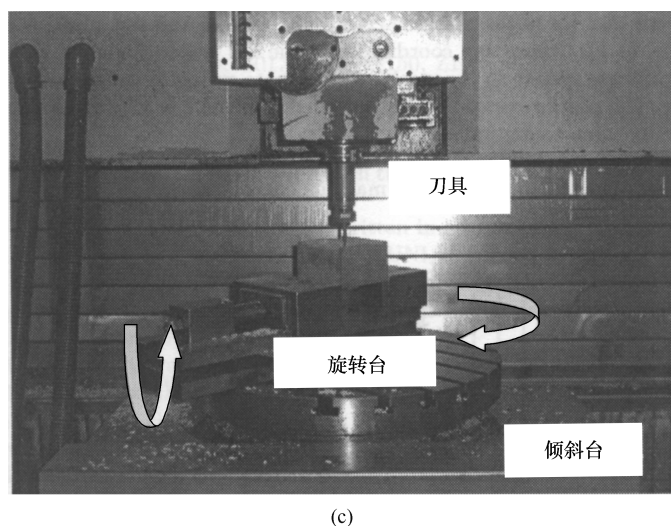
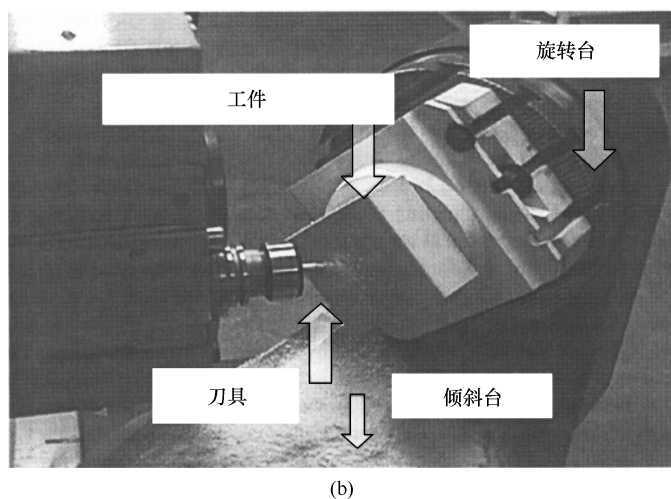


图 2.1 一个工作台上带有两个旋转轴的五轴铣床（续）

(b) MAHO 600E 的工件、夹具和旋转台 (c) HERMLE UWF902H 铣床

数字控制机床通过特殊的代码来编制程序。这些代码称为数控加工程序或部件加工程序，由字母、数字和特殊符号表示的指令构成。数控加工程序控制机床按一种特定的加工技术和方法运动，例如程序告诉机床，使用的刀具形状和尺寸是什么，关于工件的速度和进给率是什么、方向是什么；也可以通过描述一系列刀具定位[⊖]（CL）点来加工需求部件。

数控加工程序的设计考虑特定零部件的几何形状、切削过程、机床参数和所用的切削刀具。程序提供给机床控制器，控制器驱动机床的伺服电动机在 X 、 Y 或 Z 方向将工作台或主轴移动特定距离并且在一个或两个旋转方向将刀具相对于工件倾斜。通过沿空间中一条预先计算的轨迹移动刀具来加工零部件，这条轨迹即刀具轨迹。加工特定零部件的数控加工程序的获得主要包括以下步骤：

1) 工件坐标系中的刀具轨迹生成。这一阶段通常要求在工件坐标系中被称作刀具接触点[⊖]（CC）的一系列连续坐标 $W = (x_w, y_w, z_w)$ 和刀具方向 $I = (I_x, I_y, I_z)$ 沿一系列曲线分布，这些曲线遵从特定的模式，例如之字形或螺旋形（见图 2.2）。

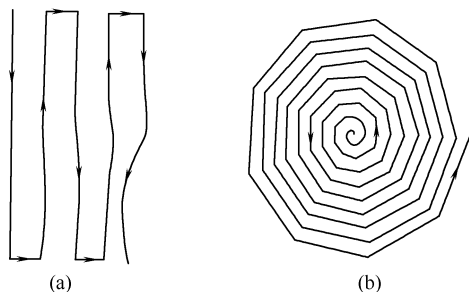


图 2.2 之字形和螺旋形刀具轨迹

(a) 之字形刀具轨迹 (b) 螺旋形刀具轨迹

⊖ 刀具定位指一台数控铣床被指示保持铣刀的位置。

⊖ 刀具接触点指一组坐标，在此坐标处刀具刃口和表面相接触。

2) 由 CC 点计算 CL 数据。 $CC-CL$ 数据转换方法必须包括切削刀具的几何形状和刀具关于工件的定向。在这一阶段, 可以使用各种优化技术来生成最优刀具定位数据 (见文献 [2])。

3) 每一个 CL 点都被转变为机床轴向指令 $II = (M, R) \in \mathbb{R}^5$, 包括在机床坐标系中刀头的三个笛卡儿坐标 $M = (x_m, y_m, z_m)$ 和两个旋转角 $R = (a, b)$ 。将 CL 点坐标从工件坐标系转变为机床坐标系, 这一操作被称作后处理。后处理程序需要机床运动学和机床配置的知识。

4) 轴向指令按照机床控制器可以理解的格式被转变为 NC 数控加工程序。

以上内容有可能包括优化和验证阶段。优化阶段包含一个价值函数, 它表示一种特定类型的误差或几种误差的组合。刀具轨迹以这样的一种方式被修改或重建, 使价值函数减小甚至最小化。

验证阶段包括材料去除的实际加工或计算机建模。材料的去除使输出成为一个实体模型, 然后将实体模型和要求的零部件作比较并评价优化策略的效率。

2.2 数控加工程序

数控加工程序是一段由被称作数控模块的指令组成的生产程序。每个指令的语法遵从从一个由 ISO 规范的特定形式。这一标准由许多机器控制单元 (MCU) 制造者来制订, 可以有一些较小的变化。当操作机器时, 数控程序被连续地执行, 每次执行一个指令或一个数控模块。数控模块由字组成, 字由符号和数字组成。每个字以一个地址代码开始, 地址代码是一个单独的字母符号 (A ~ Z), 它明确了计算机应该做什么。这一指令结构被称为字地址代码。例如模块

N20 G01 X100 Y-150 Z10.5 A30 B-10 F100 M03 S600

由 10 个字组成: N20, G01, X100, Y-150, Z10.5, A30, B-10, F100, M03, S600。模块 N20 指示机床将刀具从目前的位置直线运动

到位置 $(x_m, y_m, z_m) = (100, -150, 10.5)$ (G01) 并且绕 A 轴旋转 30° 、 B 轴旋转 -10° ，同时进给率为 100mm/min (F100)、主轴以 600r/min (S600) 顺时针旋转。

数控加工程序通常使用高级语言编写，例如 APT (自动编程工具)^[7]、UNIAPT[⊖]等，然后转换为字地址代码。一些商业 CAD/CAM 系统可以从刀具轨迹直接生成字地址代码，例如 Unigraphics、Pro/Engineer 等。

一段完整的数控加工程序以一个百分比符号开始，后面跟随着以 ISO 字地址形式表示的数控模块。每个数控模块以由一个 N 字地址表示的模块号开始。模块可以包含一个字地址或一连串的字地址。字地址代码列表如表 2.1 所示。

表 2.1 字地址代码列表

代 码	功 能
A	绕 x 轴旋转角度的大小
B	绕 y 轴旋转角度的大小
C	绕 z 轴旋转角度的大小
D	绕特殊轴或第三进给功能角度的大小
E	绕特殊轴或第二进给功能角度的大小
F	进给功能
G	准备功能
H	未指定
I	到圆弧中心的距离或平行于 x 轴的螺距
J	到圆弧中心的距离或平行于 y 轴的螺距
K	到圆弧中心的距离或平行于 z 轴的螺距

⊖ UNIAPT 是自动编程工具的一个基于小型计算机的版本，它由一个称为“联合计算”的软件公司开发。

(续)

代 码	功 能
L	未指定
M	辅助功能
N	序号
O	参考倒回停止
P	平行于 x^* 轴的第 3 个快速移动或运动维
Q	平行于 y^* 轴的第 3 个快速移动或运动维
R	平行于 z^* 轴的第 3 个快速移动或运动维
S	主轴速度功能
T	刀具功能
U	平行于 x^* 轴的副运动距离
V	平行于 y^* 轴的副运动距离
W	平行于 z^* 轴的副运动距离
X	x 向主运动距离
Y	y 向主运动距离
Z	z 向主运动距离

除 G 和 M 外，每个字母都有一个特定的功能并且跟随一个整数或一个浮点数。ISO 字地址模块的形式如下：

```
N5 G2 X±53 Y±53 Z±53 U... V... W... L... J... K...
F5 S4 T4 M2 *
```

除 N 之外的所有字地址都是可选择的，模块形式是指令敏感的。每个字地址之后的数值表明对于此特定字地址允许的最大数字数目。一个单独的数字表示一个整数值，两个数字表示一个实数值。第一个和第二个数字分别表示小数点前和小数点后的最大数字数目。例如 N5 指模块序号以字母 N 开始，后面最多可以跟随 5 个数字（N0 ~ N99999）。X ± 53 指 X 运动尺寸以字母 X 开始，后面跟随加号或减号

以及一个实数值，此实数值在小数点前最多有 5 个数字，在小数点后最多有 3 个数字。模块以符号 “*” 或 “;” 或 “回车” 或 “换行” 结束。用于执行机器操作的字地址的用法见下文。

1. 准备功能

一个指定了一种刀具运动类型的预设功能可以用一个 G 字地址来表示，后面跟随一个从 00 到 99 的两位整数。用 G 代码指示机床刀具运动的实例如下：

- 1) 快速运动。
- 2) 直线或曲线受控进给运动。
- 3) 一系列受控进给运动，用于镗孔、加工工件到特定尺寸或将工件边缘加工成装饰性的轮廓形状。
- 4) 设置刀具信息，例如补偿。

ISO 标准化 G 代码的功能列表如表 2.2 所示。

表 2.2 ISO 标准化 G 代码的功能列表

代 码	功 能
G00	点对点定位，快速进给
G01	直线插补
G02	顺时针圆弧插补
G03	逆时针圆弧插补
G04	暂停
G05	保持/延迟
G06	抛物线插补
G07	未指定
G08	加速
G09	减速
G10	大尺寸（10 ~ 100in）直线插补
G11	小尺寸（≤10in）直线插补

(续)

代 码	功 能
G12	未指定
G13 ~ G16	轴选择
G17	xy 平面选择
G18	zx 平面选择
G19	yz 平面选择
G20	大尺寸顺时针圆弧插补
G21	小尺寸顺时针圆弧插补
G22 ~ G29	未指定
G30	大尺寸逆时针圆弧插补
G31	小尺寸逆时针圆弧插补
G32	未指定
G33	螺纹切削，等螺距
G34	螺纹切削，线性增加的螺距
G35	螺纹切削，线性减小的螺距
G36 ~ G39	未指定
G40	刀具补偿取消
G41	刀具径向左补偿
G42	刀具径向右补偿
G43	刀具正补偿
G44	刀具负补偿
G45 ~ G52	未指定
G53	零位补偿消除
G54 ~ G59	参考点/零位偏移
G60	目标值，定位公差 1
G61	目标值，定位公差 2 或循环

(续)

代 码	功 能
G62	快速进给定位
G63	攻螺纹
G64	进给率或速度改变
G65 ~ G69	未指定
G70	用英寸制单位计算
G71	用十进制单位计算
G72 ~ G79	未指定
G80	固定循环注销
G81 ~ G89	固定钻孔和镗孔循环
G90	绝对尺寸
G91	增量尺寸
G92	预制寄存
G93	未指定
G94	每分钟进给率（与 G70 一起使用时是英制单位）
G95	主轴每转进给率（与 G71 一起使用时是米制单位）
G96	主轴恒线速度
G97	主轴每分钟转数
G98 ~ G99	未指定

2. 坐标功能

刀具尖端的坐标使用一个字地址来指定，例如 X、Y、Z、U、V、W、I、J、K 等。这些字地址通常被标记为实数值。

3. 进给功能

进给率由 F 字地址指定。进给单位通过使用一个合适的 G 代码（G94 或 G95）来设定。进给功能是模态的，它意味着一旦进给率被设定，它就会影响所有后续的模式，直到它被另一个 F 值取代。

4. 速度功能

当和准备代码 G97 一起使用时，主轴速度以每分钟转动次数由 S 字地址来指定。对于一个恒定的表面速度（G96），主轴速度以米每分钟或英尺每分钟来给定。

5. 刀具功能

对于配备有刀具库和自动换刀装置的数控机床来说，刀具选择由 T 字地址来执行，T 字地址后面跟随一个号码表明刀具在刀库中的位置。例如 T19 指储存在刀库中位置为 19 的刀具被使用。如果刀具改变被手工完成，T 字地址将发信号使机床停止。

6. 辅助功能

夹具、主轴、切削液和其他一些全局操作的控制由 M 字地址来执行。M 代码的功能列表如表 2.3 所示。

表 2.3 M 代码的功能列表

代 码	功 能
M00	程序停止
M01	可选的可编程停止
M02	程序结束
M03	主轴顺时针方向
M04	主轴逆时针方向
M05	主轴停止
M06	换刀
M07	1 号切削液开
M08	2 号切削液开
M09	切削液关
M10	夹紧
M11	松开
M12	未指定
M13	主轴顺时针方向，切削液开
M14	主轴逆时针方向，切削液开
M15	快速正运动
M16	快速负运动

(续)

代 码	功 能
M17 ~ M18	未指定
M19	主轴定向停止
M20 ~ M29	未指定
M30	纸带结束
M31	互锁旁路
M32 ~ M35	恒定切削速度
M36 ~ M39	未指定
M40 ~ M45	齿轮换挡，否则不指定
M46 ~ M49	不指定
M50	3 号切削液开
M51	4 号切削液开
M52 ~ M54	未指定
M55	刀具直线位移，位置 1
M56	刀具直线位移，位置 2
M57 ~ M59	未指定
M60	更换工件
M61	工件直线位移，位置 1
M62	工件直线位移，位置 2
M63 ~ M67	未指定
M68	夹紧工件
M69	松开工件
M70	未指定
M71	工件角度位移，位置 1
M72	工件角度位移，位置 2
M73 ~ M77	未指定
M78	夹紧非活动的床身导轨
M79	松开非活动的床身导轨
M80 ~ M99	未指定

必须注意：M80 ~ M99 是没有被指定的，这意味着 MCU 制造者可以将这些剩余的代码用为其他目的，例如适应新的计算机数字控制编程的能力，像实时表面插补^[6]或毕达哥拉斯-速端曲线^[3-5]。

7. 简单数控铣削程序实例

我们以一个简单的切割一个 $2\text{cm} \times 4\text{cm}$ 矩形的数控程序来结束这一部分。

N1 X0 Y0 T01

N2 X0 Y40

N3 X20 Y40

N4 X20 Y0

N5 X0 Y0

N6 M00

第一行 (N1) 表面机床运动到格点 $(X, Y) = (0, 0)$ 并使用刀具 01。

第二行 (N2) 表明机床运动到格点 $(X, Y) = (0, 40)$ 。

第三行 (N3) 表面机床运动到格点 $(X, Y) = (20, 40)$ 。

第四行 (N4) 表面机床运动到格点 $(X, Y) = (20, 0)$ 。

第五行 (N5) 使机床返回起点 $(X, Y) = (0, 0)$ 。

第六行 (N6) 使机床停止。

2.3 五轴机床的分类

一个典型的五轴机床有三个平动轴和两个转动轴。这五个自由度是建立切削刀具相对于工件的任意位置和方向所需的最少的自由度数量^[1]。

根据平动轴和转动轴的数量，五轴机床可以被分为四类：

- ① 三个平动轴和两个转动轴。
- ② 两个平动轴和三个转动轴。
- ③ 一个平动轴和四个转动轴。
- ④ 五个转动轴。

然而，现有的大多数五轴机床刀具都是第一种类型，并且在本书

中介绍的所有方法都是关于这种类型的五轴机床的。

机床的轴可以以各种组合指派给刀具和机床工作台。机床的运动链系图表明这种指派是如何完成的。例如图 2.3 中的运动链系图相当于图 2.1a 中的五轴机床。此图告诉我们，工作台（事实上，工作台是由两个更小的相连的工作台组成的）是由包括两个转动轴在内的四个轴支持的，刀具仅由一个轴支持。

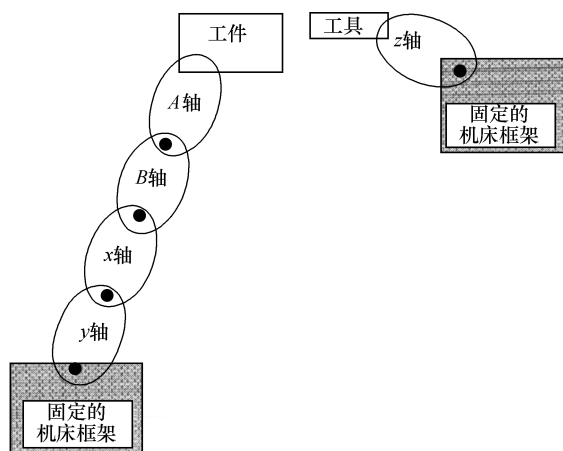


图 2.3 图 2.1a 中的五轴机床的运动链系图

另一种五轴机床的分类是基于携带轴的工作台携带轴数和刀具携带轴数。另外，机床也可以由旋转轴的位置（在刀具或工作台上）来分类。分类如下：

(1) 基于携带轴的工作台和刀具的数量的五轴机床分类

1) 5/0 机床。所有轴支持工作台，刀具在空间固定。因为刀具固定，当刀具尺寸小时，它能被最佳地使用。

2) 4/1 机床。四个工作台携带轴，一个刀具携带轴（见图 2.4）。

3) 3/2 机床。三个工作台携带轴，两个刀具携带轴（见图 2.5）。

4) 2/3 机床。两个工作台携带轴，三个刀具携带轴（见图 2.6）。这种结构允许加工大工件。

5) 1/4 机床。一个工作台携带轴，四个刀具携带轴（见图 2.5）。

6) 0/5 机床。所有轴支持刀具，工作台在空间固定。这种结构用来处理非常重的工件。然而，由于轴滑道的弹性变形，运动链中大量的连接将导致相当大的误差。

(2) 基于两个旋转轴位置的五轴机床分类

- 1) 2-0 机床。两个旋转轴支持工作台（见图 2.4）。
- 2) 1-1 机床。一个旋转轴支持工作台，一个支持刀具（见图 2.5）。
- 3) 0-2 机床。两个旋转轴支持刀具（见图 2.6）。

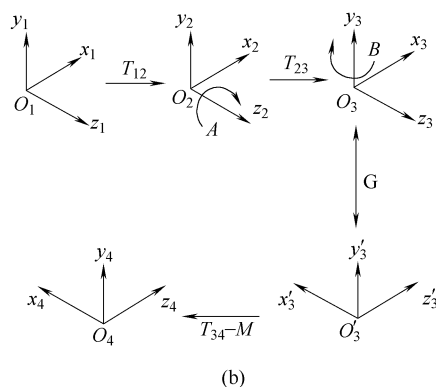
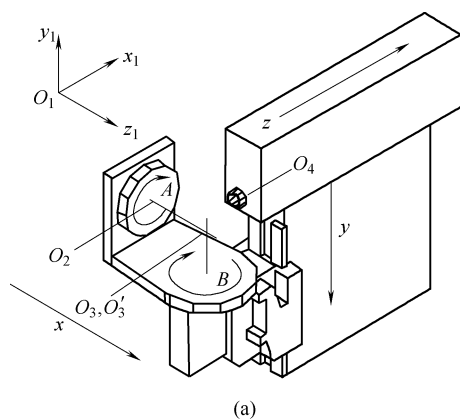


图 2.4 2-0 机床

(a) 2-0 机床实例 (b) 参考坐标系

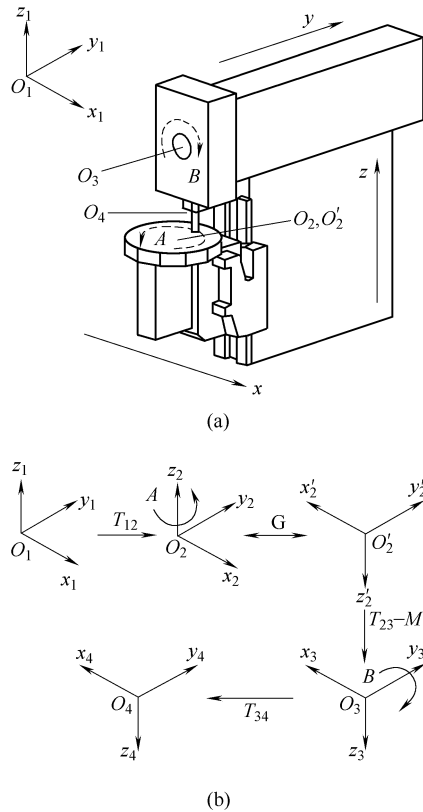


图 2.5 1-1 机床

(a) 1-1 机床实例 (b) 参考坐标系

选择一个五轴机床执行一项特定应用不是一件容易的事情。通过分析工件的特征，如重量和尺寸可以选择机床。例如一件非常重的工件需要一台具有水平工作台的机床，水平工作台能更方便地固定和处理工件。同时，机床应具有较短的工件运动链系，因为重工件会导致支持工作台的轴滑道^[1]的弹性变形。机床的适用性也可以通过运动误差理论框架来分析。这一分析的理论背景在本书第 7 章中给出。

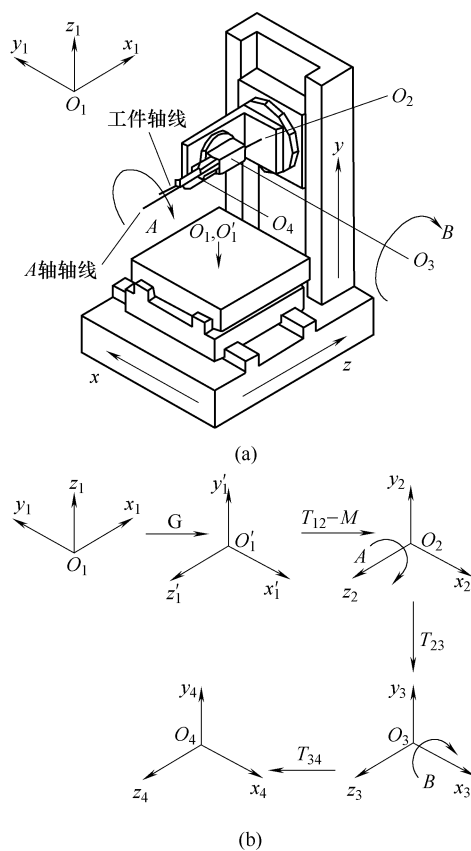


图 2.6 0-2 机床

(a) 0-2 机床实例 (b) 参考坐标系

2.4 五轴机床运动学

五轴机床提供了 5 个自由度，这 5 个自由度允许切削刀具在从一点到另一点运动时相对于工件倾斜。因此，受机床运动学的影响，刀具尖端在工件坐标系中沿一条非线性轨迹运动。当机床刀具的非直线特性允许加工复杂表面部件时，也会在切削装置和机床其他部件之间产生底切或过切甚至碰撞。

指定切削装置的运动路径的数控零件程序的获取是以 CC 点在表

面上的分布开始的。在五轴加工中，每个 CC 点也和一个被定位于右旋的、矩形坐标系中的刀具矢量有关；然后， CC 点被转变为 CL 点， CL 点指定了刀尖在工件坐标系中的坐标；最后， CL 点被转变为机床坐标（或 G 代码）来控制机床的运动并生成数控程序。

将 CC 点转变为 CL 点依赖于刀具几何形状和倾斜（见第 3 章给出的实例）。对于一台特定的五轴机床， CL 点从工件坐标系到机床坐标系的转变需要考虑了此机床运动学在内的信息。

机床的运动学 $k \equiv k(R, M)$ 是从机床坐标中一点 $M = (x_m, y_m, z_m)$ 到工件坐标中一点 $W = (x_w, y_w, z_w)$ 的转变，其中 $R = (a, b)$ 是一对旋转角。为了简便，在可能的情况下这一转变将被记作 $k(M)$ 。同时，使 $I = (I_x, I_y, I_z)$ 表示在工件坐标系中指定的刀具向量方向。

为了得到机床运动学等式，引入下列坐标系：工件坐标系 O_1 ，第一转动局部坐标系 O_2 ，第二转动局部坐标系 O_3 ，主轴坐标系 O_4 （见图 2.4 ~ 图 2.6）。第一个旋转轴称为 A 轴，第二个称为 B 轴。当一台数控机床起动时，机床的度量系统通过将机床刀具移动到机床坐标系中的参考点进行初始化，这样机床控制会熟悉每个滑座的绝对位置。

考虑在图 2.1a 中展示的五轴机床，此机床是 2-0 型的。两个旋转轴 A 和 B 支持工作台。机床滑座从机床坐标系中原始位置的运动如下（观察者站在机床的前面注视 z 轴正向）：

- ① x_m 正向：工作台向右移动。
- ② y_m 正向：工作台向下移动。
- ③ z_m 正向：工作台远离观测者。
- ④ a 正向：工作台携带工件绕 A 轴顺时针旋转。
- ⑤ b 正向：工作台绕 B 轴从右向左摆动。

选择每个笛卡儿轴滑座的正方向使得切削装置在主轴坐标系 O_4 中对应轴的正方向远离工件（见图 2.4）。换句话说，支承工作台的一个滑座轴的正方向和 O_4 中对应轴的正方向相反，支承刀具的滑座轴的正方向和 O_4 中对应轴的正方向相同。例如在图 2.4 中 2-0 机床支承工作

台的滑道 X 和 Y 的正方向分别是正 X_4 和 Y_4 的相反方向，而支承刀具的滑道 Z 正方向和正 Z_4 同向。

从工件到机床坐标系的转变包括三种转变类型：对另一个参考系的坐标转变，无运动；对应于实际机床转动的转变；对应于实际机床移动的转变。2-0 机床（见图 2.4）的运动学公式如下：

1) 步骤一：坐标转变 $O_1 \rightarrow O_2$ 。 O_1 中的点 W 转变为 O_2 中的点 P_2 ：

$$P_2 = W + T_{12}$$

其中， T_{12} 是 O_2 中 O_1 的中心坐标。

2) 步骤二：在 O_2 中绕 A 轴旋转 a 。 O_2 中的点 P_2 绕 A 轴旋转 a 到一个新的位置 P_{2A} ：

$$P_{2A} = A[a]P_2 = A[a](W + T_{12})$$

其中， $A(a) = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是绕 A 轴的旋转矩阵。

3) 步骤三：坐标转变 $O_2 \rightarrow O_3$ 。 O_2 中的点 P_{2A} 转变为 O_3 中的点 P_3 ：

$$P_3 = P_{2A} + T_{23} = A[a](W + T_{12}) + T_{23}$$

其中， T_{23} 是 O_3 中 O_1 的中心坐标。

4) 步骤四：在 O_3 中绕 B 轴旋转 b 。 O_3 中的点 P_3 绕 B 轴旋转 b 到一个新的位置 P_{3B} ：

$$P_{3B} = B[b]P_3 = B[b](A[a](W + T_{12}) + T_{23})$$

其中， $B(b) = \begin{bmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{bmatrix}$ 是绕 B 轴的旋转矩阵。

5) 步骤五：坐标旋转 $O_3 \rightarrow O'_3$ 。目前对 O_3 （工作台上最后一个参考坐标系）到 O_4 （刀具上第一个参考坐标系）使用轴对齐：

$$P'_3 = GB_{3B} = GB[b](A[a](W + T_{12}) + T_{23})$$

其中, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是轴对齐矩阵。

点 P'_3 在坐标系 O'_3 中被给定, O'_3 中三个笛卡儿坐标轴的每个方向和 O_4 中相应的笛卡儿坐标轴方向相同。

6) 步骤六: 机床滑座平移 M 的坐标转变 $O'_3 \rightarrow O_4$ 。 O'_3 中的点 P'_3 被转变为 O_4 中的点 P_4 。回忆一下, 在 O_4 中当机床滑座平移 M 为正值时, 和工作台联结的工件会在负方向远离主轴。因此, 机床滑道平移 M , O'_3 的中心将会在 O_4 中的位置 $T_{34} - M$ 处, 其中 T_{34} 是 O'_3 在 O_4 中关于机床零点 $M = (0, 0, 0)$ 的坐标。最后, O'_3 中的点 P'_3 对 O_4 中的点 P_4 的转换给出如下:

$$P_4 = P'_3 + T_{34} - M = GB[b](A[a](W + T_{12}) + T_{23}) + T_{34} - M$$

$T_4 = (0, 0, -L)$ 表示坐标系 O_4 中刀具尖端的坐标, 其中, L 是刀具长度。使 P_4 和 T_4 值相等, 则

$$T_4 = P_4 = GB[b](A[a](W + T_{12}) + T_{23}) + T_{34} - M \quad (2.1)$$

重新整理之后, 为

$$M = GB[b](A[a](W + T_{12}) + T_{23}) + T_{34} - T_4 \quad (2.2)$$

$$W = A^{-1}[a](B^{-1}[b]G^{-1}(M - T_{34} + T_4) - T_{23}) - T_{12}$$

表示两个旋转角 a 和 b 以及刀具矢量方向 $I = (I_x, I_y, I_z)$ 的公式如下。 T'_1 是 $T'_4 = (0, 0, -L+1)$ 在 O_1 中的坐标, 给出如下:

$$T'_1 = A^{-1}[a](B^{-1}[b]G^{-1}(M - T_{34} + T'_4) - T_{23}) - T_{12} \quad (2.3)$$

单位向量 $T'_4 - T_4 = (0, 0, 1)$ 等于刀具矢量方向并在 O_1 坐标系中表示如下:

$$I = T'_1 - T_4 = A^{-1}[a]B^{-1}[b]G^{-1}(T'_4 - T_4) = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) \\ -\sin(b) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

将 a 和 b 值反置表示为

$$a = \begin{cases} \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) & I_x > 0 \text{ 且 } I_y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + \pi & I_x < 0 \\ \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + 2\pi & \text{其余} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$b = -\sin I_z$$

对于五轴机床任意构造的机床运动学公式的生成都可以用类似的方式完成。对于图 2.5 中展示的 1-1 机床，在 O_4 中刀具尖端的坐标如下：

$$T_4 = B[b](GA[a](W + T_{12}) + T_{23} - M) + T_{34} \quad (2.6)$$

显然

$$\begin{aligned} M &= GA[a](W + T_{12}) + T_{23} + B^{-1}[b](T_{34} - T_4) \\ W &= A^{-1}[a]G^{-1}(M - T_{23} - B^{-1}[b](T_{34} - T_4)) - T_{12} \\ I = T'_1 - W &= A^{-1}[a]G^{-1}B^{-1}[b](T'_4 - T_4) = \begin{pmatrix} \cos a \sin b \\ -\sin a \sin b \\ \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) & I_x > 0 \text{ 且 } I_y \leq 0 \\ -\arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + \pi & I_x < 0 \\ -\arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + 2\pi & \text{其余} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$b = \arccos I_z$$

其中

$$A[a] = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B[b] &= \begin{pmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \\
 G &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 T_4 &= (0, 0, L)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

对于图 2.6 所示的 2-0 机床, 在 O_4 中刀具尖端 T_4 的坐标如下:

$$T_4 = B[b](A[a](GW + T_{12} - M) + T_{23}) + T_{34} \tag{2.9}$$

显然

$$\begin{aligned}
 M &= GW + T_{12} + A^{-1}[a](T_{23} + B^{-1}[b](T_{34} - T_4)) \\
 W &= G^{-1}(M - T_{12} - A^{-1}[a](T_{23} - B^{-1}[b](T_{34} - T_4))) \\
 I = T'_1 - W &= G^{-1}A^{-1}[a]B^{-1}[b](T'_4 - T_4) = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin a \sin b \\ -\cos a \sin b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$a = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{I_y}{I_z}\right) & I_y \leq 0 \text{ 且 } I_z > 0 \\ -\arctan\left(\frac{I_y}{I_z}\right) + \pi & I_z < 0 \\ -\arctan\left(\frac{I_y}{I_z}\right) + 2\pi & \text{其余} \end{cases} \tag{2.10}$$

$$b = -\arccos I_x$$

其中

$$\begin{aligned}
 A[a] &= \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 B[b] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin b \\ 0 & \sin b & \cos b \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_4 = (0, 0, L)$$

2.5 五轴加工实例

利用五轴机床加工诸如铸型和金属模之类的物体需要一个计算机程序，此程序命令机床移动切削装置经过一块原料，去除所有多余的材料而留下需要的形状。刀具尖端的轨迹被称为刀具轨迹，产生刀具轨迹的过程被称为刀具轨迹生成。

表面 $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 由下面一组参数公式来描述：

$$\begin{aligned} x &= 100u - 50 \\ y &= 100v - 50 \\ z &= 10[(u + 0.5)^2 + v^2] - 50 \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中， $0 \leq u \leq 1$ 和 $0 \leq v \leq 1$ 。简单形状参数表面的划分如图 2.7 所示。

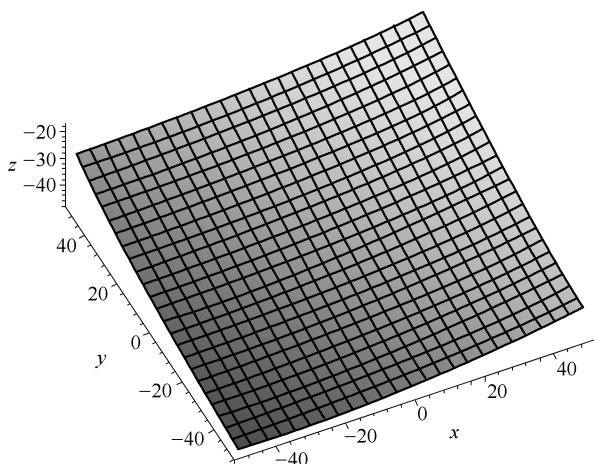


图 2.7 简单形状参数表面的划分

获得这一表面的五轴加工刀具轨迹的一种简便方法是图 2.2a 所示的之字形模式。有 10 条刀具轨迹均等地散布在 v 方向，每一条轨道有 10 个 CC 点均等地散布在 u 方向。每个 CC 点和一个与表面法向量一致的刀具矢量相关。计算表面法向量的方法在 3.1 节中。沿刀具矢量方向 CC 点的划分如图 2.8 所示。因为刀具矢量方向和表面法向量一致，刀具接触点被假设和刀具尖端一致。因此， CL 点被设置为和 CC 点具有相同的位置。

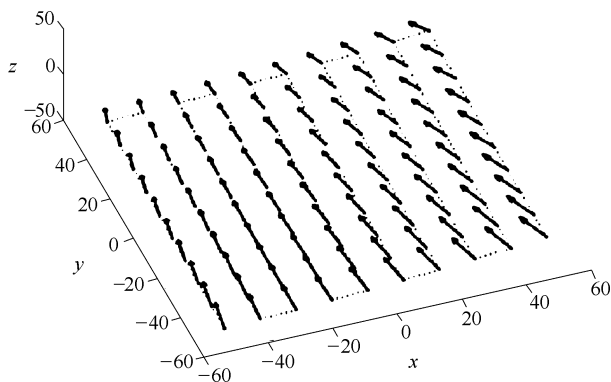


图 2.8 沿图 2.7 中刀具矢量方向 CC 点的划分

接着， CL 点被转变为机器指令或者 G 代码。对于图 2.1a 中展示的 MAHO 机床，利用式 (2.2) 和式 (2.5) 来计算机床坐标 M 和两个旋转角 a 、 b 。机床参数如下：

$$T_{12} = (0.0, 0.0, 213.58)$$

$$T_{23} = (0.08, 0.0, -250.314)$$

$$T_{34} = (0.0, 0.0, -350.0)$$

$$L = 177.651$$

图 2.8 中的刀具轨迹 CL 点在工件和机床坐标系中的坐标（部分）如表 2.4 所示。G 代码可以直接从机床坐标中得出。在 (x_m, y_m, z_m) 的前面各自加上地址字 X, Y, Z。同样，在两个旋转角的前面加上地址字 A, B。每个 CL 点构成一块 G 代码。G 代码以字地址 N 开头，后

面跟随模块号。图 2.8 刀具轨迹的 G 代码如表 2.5 所示。

表 2.4 图 2.8 中的刀具轨迹 CL 点

点	x_w	y_w	z_w	I_x	I_y	I_z
1	-50.000	-50.000	-47.500	-0.100	0.000	0.995
2	-50.000	-38.889	-47.377	-0.099	0.022	0.995
3	-50.000	-27.778	-47.006	-0.099	-0.044	0.994
4	-50.000	-16.667	-46.389	-0.099	-0.066	0.993
5	-50.000	-5.556	-45.525	-0.099	-0.088	0.991
6	-50.000	5.556	-44.414	-0.099	-0.110	0.989
7	-50.000	16.667	-43.056	-0.099	-0.132	0.986
8	-50.000	27.778	-41.451	-0.098	-0.153	0.983
9	-50.000	38.889	-39.599	-0.098	-0.174	0.980
10	-50.000	50.000	-37.500	-0.098	-0.195	0.976
11	-38.889	50.000	-36.265	-0.119	-0.195	0.974
12	-38.889	38.889	-38.364	-0.119	-0.174	0.978
13	-38.889	27.778	-40.216	-0.120	-0.153	0.981
14	-38.889	16.667	-41.821	-0.120	-0.131	0.984
15	-38.889	5.556	-43.179	-0.121	-0.110	0.987
16	-38.889	-5.556	-44.290	-0.121	-0.088	0.989
17	-38.889	-16.667	-45.154	-0.121	-0.066	0.990
18	-38.889	-27.778	-45.772	-0.121	-0.044	0.992
19	-38.889	-38.889	-46.142	-0.121	-0.022	0.992
20	-38.889	-50.000	-46.265	-0.121	0.000	0.993
⋮		⋮				
91	50.000	50.000	-17.500	-0.282	-0.188	0.941
92	50.000	38.889	-19.599	-0.283	-0.168	0.944
93	50.000	27.778	-21.451	-0.284	-0.147	0.947
94	50.000	16.667	-23.056	-0.285	-0.127	0.950
95	50.000	5.556	-24.414	-0.286	-0.106	0.952
96	50.000	-5.556	-25.525	-0.286	-0.085	0.954
97	50.000	-16.667	-26.389	-0.287	-0.064	0.956
98	50.000	-27.778	-27.006	-0.287	-0.043	0.957
99	50.000	-38.889	-27.377	-0.287	-0.021	0.958
100	50.000	-50.000	-27.500	-0.287	0.000	0.958

表 2.5 图 2.8 刀具轨迹的 G 代码

点	G 代码							
1	N10	G01	X58.213	Y50.000	Z-251.183	A180.000	B-84.289	F100
2	N11	G01	X65.599	Y27.116	Z-250.181	A192.529	B-84.151	F100
3	N12	G01	X65.823	Y5.077	Z-249.387	A203.962	B-83.755	F100
4	N13	G01	X60.483	Y-13.868	Z-248.802	A213.690	B-83.147	F100
5	N14	G01	X51.687	Y-29.066	Z-248.426	A221.634	B-82.379	F100
6	N15	G01	X41.073	Y-40.881	Z-248.259	A228.013	B-81.498	F100
7	N16	G01	X29.636	Y-50.000	Z-248.301	A233.130	B-80.538	F100
8	N17	G01	X17.907	Y-57.080	Z-248.549	A237.265	B-79.523	F100
9	N18	G01	X6.142	Y-62.644	Z-249.002	A240.642	B-78.471	F100
10	N19	G01	X-5.544	Y-67.082	Z-249.657	A243.435	B-77.396	F100
11	N20	G01	X-5.058	Y-59.256	Z-248.513	A238.570	B-76.809	F100
12	N21	G01	X6.126	Y-54.078	Z-247.854	A235.491	B-77.826	F100
13	N22	G01	X17.155	Y-47.741	Z-247.398	A231.843	B-78.810	F100
14	N23	G01	X27.830	Y-39.929	Z-247.146	A227.490	B-79.747	F100
15	N24	G01	X37.806	Y-30.270	Z-247.101	A222.274	B-80.621	F100
16	N25	G01	X46.515	Y-18.380	Z-247.264	A216.027	B-81.406	F100
17	N26	G01	X53.090	Y-3.990	Z-247.637	A208.610	B-82.074	F100
18	N27	G01	X56.376	Y12.815	Z-248.219	A199.983	B-82.590	F100
19	N28	G01	X55.170	Y31.305	Z-249.010	A190.305	B-82.919	F100
20	N29	G01	X48.751	Y50.000	Z-250.009	A180.000	B-83.032	F100
⋮				⋮				
91	N100	G01	X-46.756	Y-13.868	Z-245.860	A213.690	B-70.173	F100
92	N101	G01	X-40.711	Y-7.966	Z-246.207	A210.651	B-70.775	F100
93	N102	G01	X-35.461	Y-1.644	Z-245.751	A207.408	B-71.328	F100
94	N103	G01	X-31.117	Y5.077	Z-245.495	A203.962	B-71.825	F100
95	N104	G01	X-27.787	Y12.156	Z-245.440	A200.323	B-72.260	F100
96	N105	G01	X-25.578	Y19.531	Z-245.588	A196.504	B-72.626	F100
97	N106	G01	X-24.580	Y27.116	Z-245.940	A192.529	B-72.917	F100
98	N107	G01	X-24.860	Y34.805	Z-246.496	A188.427	B-73.129	F100
99	N108	G01	X-26.453	Y42.476	Z-247.256	A184.236	B-73.258	F100
100	N109	G01	X-29.357	Y50.000	Z-248.219	A180.000	B-73.301	F100

图 2.9 所示为使用 10 × 10 刀具轨迹的切削表面式 (2.12) 的切削结果。使用 Unigraphics 18 完成仿真。显然，刀具轨迹包含数量不足的

CL 点并留下大量的多余材料。

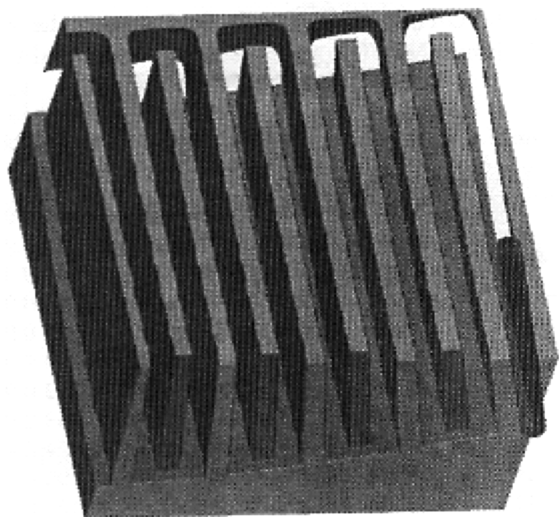


图 2.9 使用 10×10 刀具轨迹的切削表面式 (2.12) 的切削仿真

图 2.10 所示为使用 20×20 之字形刀具轨迹的切削表面式 (2.12) 的切削仿真。刀具去除了大部分多余材料并生成了一个需求表面的合理模型。

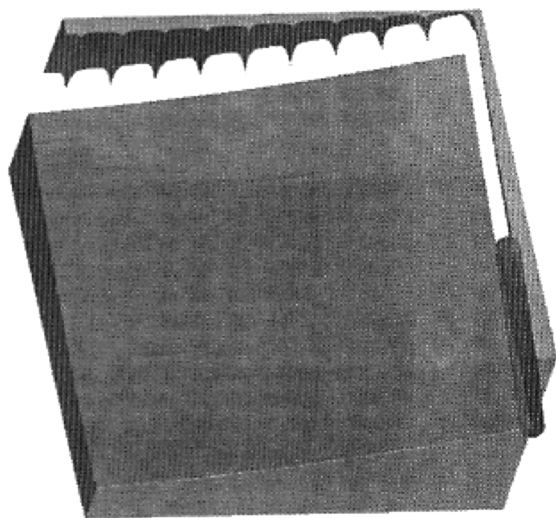


图 2.10 使用 20×20 之字形刀具轨迹的切削表面式 (2.12) 的切削仿真

以上用于刀具轨迹生成的方法对于简单表面效果良好。然而，对于如图 2.11 所示的复杂表面，这种方法可能会在 CC 点处产生过切、底切以及在点与点之间产生非线性轨迹回路，从而毁坏工件或甚至损毁机床自身（见图 2.12 和图 2.13）。

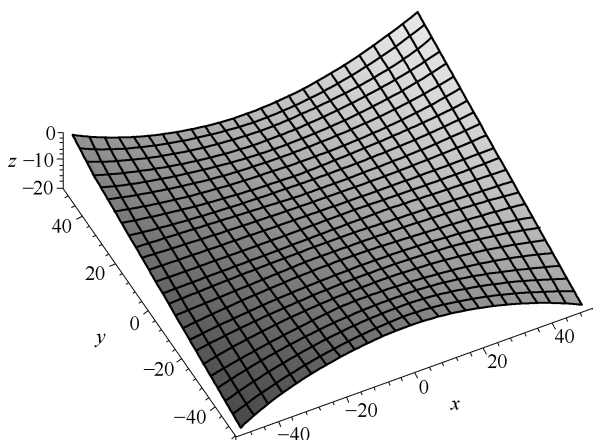


图 2.11 贝塞尔曲面

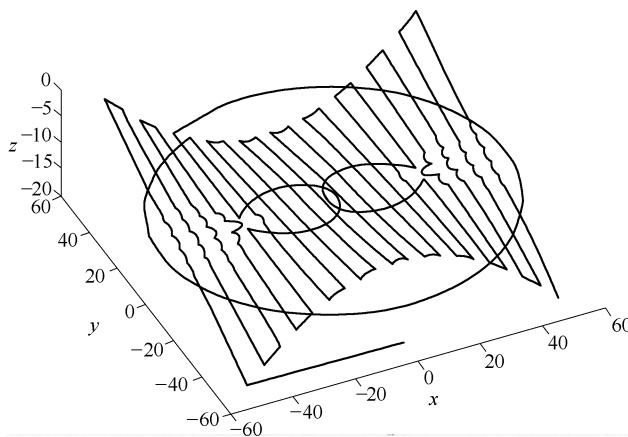


图 2.12 图 2.11 中表面的 20×20 刀具轨迹的伴随回路

此外，对于凹形表面，切削刀具需要倾斜来避免曲率干涉，并且刀具轨迹之间的距离是固定的。因此，如果此距离过大，刀具会产生未去除材料的脊状突起，它通常被称为尖突或扇形凹点（皱褶）。另

一方面,如果此距离过小,将导致多余的路径,刀具在轨迹之间的相同区域产生不必要的切削。

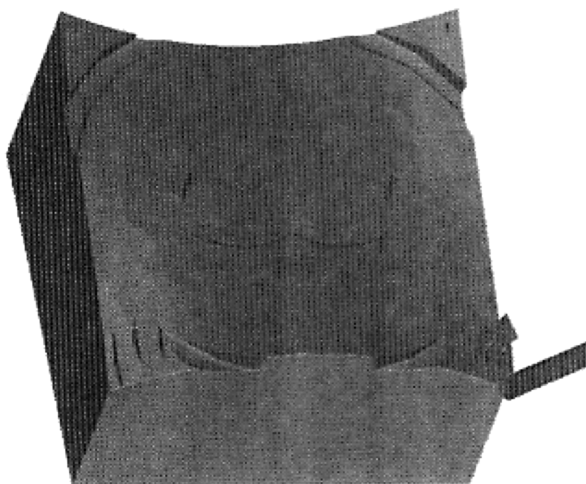


图 2 13 图 2 11 中利用 20×20 刀具轨迹的表面切削仿真

参 考 文 献

- [1] Bohez, E. L. J. 2002. Five-axis milling machine tool kinematic chain design and analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(4):505–520.
- [2] Choi, B. K., Park, J. W., and Jun, C. S. 1993. Cutter-location data optimization in 5-axis surface machining. *Computer-Aided Design*, 25(6):377–386.
- [3] Farouki, R. T., Manjunathaiah, J., Nicholas, D., Yuan, G.-F., and Jee, S. 1998. Variable-feedrate CNC interpolators for constant material removal rates along Pythagorean-hodograph curves. *Computer-Aided Design*, 30(8):631–640.
- [4] Farouki, R. T., Manjunathaiah, J., and Yuan, G.-F. 1999. G codes for the specification of Pythagorean-hodograph tool paths and associated feedrate functions on open-architecture CNC machines. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 39(1):123–142.
- [5] Farouki, R. T. and Shah, S. 1996. Real-time CNC interpolators for Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 13(7):583–600.
- [6] Lin, R.-S. 2000. Real-time surface interpolator for 3-D parametric surface

machining on 3-axis machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40(10):1513–1526.

- [7] Ross, D. T. 1978. Origins of the APT language for automatically programmed tools. In *HOPL-1: The first ACM SIGPLAN conference on History of programming languages*, pages 61–99.

第 3 章 刀具路径规划基本问题

五轴 NC 加工的刀具路径规划涉及许多问题。在这一章中讨论四个基本问题，即表面表示、切屑宽度估计、最优化刀具方向和步进（运动学）误差。

3.1 表面表示

五轴数控机床广泛用于加工金属模、铸模、涡轮叶片、宇航和机动零部件等。这些零部件通常具有复杂的几何表面，并由参数来表示。表面的参数等式表示法允许对表面进行不同性质的简单评估。许多刀具轨迹生成技术要求特定表面性质的计算，例如表面法向矢量和法曲率。常用的表面性质闭合公式如下。

设 $S=S(u, v)$ 是需要的参数表面，单位法向量 $\mathbf{n}$ 由式 (3.1) 计算：

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v|} \quad (3.1)$$

第一基本型（或线元素） I 由式 (3.2) 确定：

$$\begin{aligned} I &= d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \\ &= (\mathbf{S}_u du + \mathbf{S}_v dv) \cdot (\mathbf{S}_u du + \mathbf{S}_v dv) \\ &= \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u du^2 + 2\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v dudv + \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中

$$E = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u \quad (3.3)$$

$$F = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v \quad (3.4)$$

$$G = S_v \cdot S_v \quad (3.5)$$

第二基本型 II 由式 (3.6) 确定:

$$\begin{aligned} II &= -dn \cdot dS \\ &= -(\mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv) \cdot (S_u du + S_v dv) \\ &= -\mathbf{n}_u \cdot S_u du^2 - (\mathbf{n}_u \cdot S_v + \mathbf{n}_v \cdot S_u) dudv - \mathbf{n}_v \cdot S_v dv^2 \\ &= \mathbf{n} \cdot S_{uu} du^2 + (\mathbf{n} \cdot S_{vu} + \mathbf{n} \cdot S_{uv}) dudv + \mathbf{n} \cdot S_{vv} dv^2 \\ &= \mathbf{n} \cdot S_{uu} du^2 + 2\mathbf{n} \cdot S_{uv} dudv + \mathbf{n} \cdot S_{vv} dv^2 \\ &= e du^2 + 2f dudv + g dv^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$e = \mathbf{n} \cdot S_{uu} \quad (3.7)$$

$$f = \mathbf{n} \cdot S_{uv} \quad (3.8)$$

$$g = \mathbf{n} \cdot S_{vv} \quad (3.9)$$

S 在方向 $\mathbf{v} = aS_u + bS_v$ 的法曲率为

$$k(\mathbf{v}) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \quad (3.10)$$

主曲率, 即法曲率的最大值和最小值由式 (3.11) 和 (3.12) 给出:

$$k_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (3.11)$$

$$k_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.12)$$

其中, K 和 H 分别是高斯曲率和平均曲率:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = k_{\min} k_{\max} \quad (3.13)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}(k_{\min} + k_{\max}) \quad (3.14)$$

方向 $\mathbf{v} = aS_u + bS_v$ 和主曲率 k 有关系, 由式 (3.15) 和 (3.16) 计算:

$$(e - kE)a + (f - kF)b = 0 \quad (3.15)$$

$$(f - kF)a + (g - kG)b = 0 \quad (3.16)$$

根据 K 和 H 的值, 表面点被分为 6 种类型:

1) 凹椭圆点。如果 $K > 0$ 且 $H > 0$, 表面整体位于其邻域内切面的

表面法向量 ($\mathbf{n}$) 之上。两个主曲率都为正。

2) 凸椭圆点。如果 $K > 0$ 且 $H < 0$ ，表面整体位于其邻域内切面的表面法向量对边 ($-\mathbf{n}$) 之上。两个主曲率都为负。

3) 双曲点。如果 $K < 0$ ，表面整体位于其邻域内切面的双边。主曲率具有不同符号。

4) 凹抛物点。如果 $K = 0$ 且 $H > 0$ ，表面整体位于其邻域内切面的表面法向量 ($\mathbf{n}$) 之上。一个主曲率为正，另一个为零。

5) 凸抛物点。如果 $K = 0$ 且 $H < 0$ ，表面整体位于其邻域内切面的表面法向量对边 ($-\mathbf{n}$) 之上。一个主曲率为负，另一个为零。

6) 平面脐点。如果 $K = 0$ 且 $H = 0$ ，表面整体位于脐点邻域的切面内。

3.2 切屑宽度评估

在五轴数控加工中，可以使用几种不同类型的刀具铣削表面。刀具底部可以是平的或圆的，如图 3.1 所示。球头刀具有圆形底部，圆角部分的尺寸和刀具半径大小相同。带有微小的刀尖圆弧半径的刀具被称作环形刀具。平头刀具有平底，它能够比球头刀更有效地去除材料，但更难对雕刻表面定位。不论使用哪种铣削刀具，仅有部分表面可以被精确加工，这是因为刀具的形状总是和表面形状不匹配，精加工刀具路径之间的不规则皱褶不可避免地会在加工表面上产生。“皱褶”一词指存在于临近重叠刀具路径间的突出于设计表面轮廓之上的脊状、尖突和其他表面突起。在五轴数控加工中，控制皱褶高度是一个重要因素，因为小的皱褶高度可以极大地减少手工表面研磨和表面光顺。假定最大皱褶高度 h ，通过在目前刀具接触点计算切屑宽度，可以找出临近的刀具轨迹偏移。文献中可以找到各种类型加工刀具的切屑宽度计算方法（例如见文献 [2, 11, 12]）。下面介绍一种计算平头刀切屑宽度的简单但有效的算法。

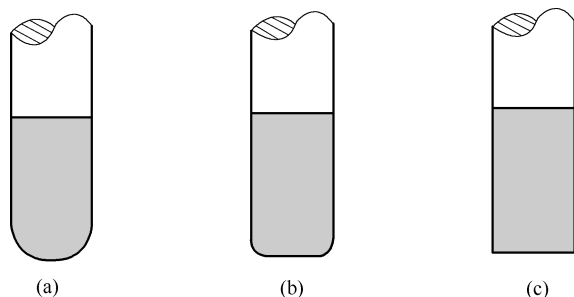


图 3.1 切削刀具举例

(a) 球头刀 (b) 环形刀具 (c) 平头刀

3.2.1 平头刀切屑宽度计算

首先在刀具接触点 O_l 处引入一个局部坐标系 (O_l, x_l, y_l, z_l) , 如图 3.2 所示。 x_l 表示刀具切削方向[⊖]在切面的归一化投影, z_l 是表面的单位法向量, $y_l = z_l \times x_l$ 。为了避免刨削, 刀具首先以关于 y_l 轴矢量的一个倾角 λ 旋转, 然后以关于 z_l 轴矢量的一个倾角 ω 旋转。半径为 r 的平头刀的底部边缘向切面 $y_l - z_l$ 的投影变成了一个椭圆, 它被称为有效切削形状。

半径为 r 的平头刀底部边缘上的一点 P 的坐标在刀具坐标系 (O_c, x_c, y_c, z_c) 中可以表示如下:

$$P_c = \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ -r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

其中, θ 指从 y_c 轴矢量的负方向到刀具底部边缘上 P 点的角度 (见图 3.2)。

对于平头刀, 刀具坐标系的中心 O_c 是刀具定位点的坐标。平头刀来自 CC 数据的刀具定位点的计算是简单易懂的。最初, 局部坐标系中的刀具定位点表示如下:

⊖ 刀具切削方向是从当前 CC 点到下一个 CC 点的方向。

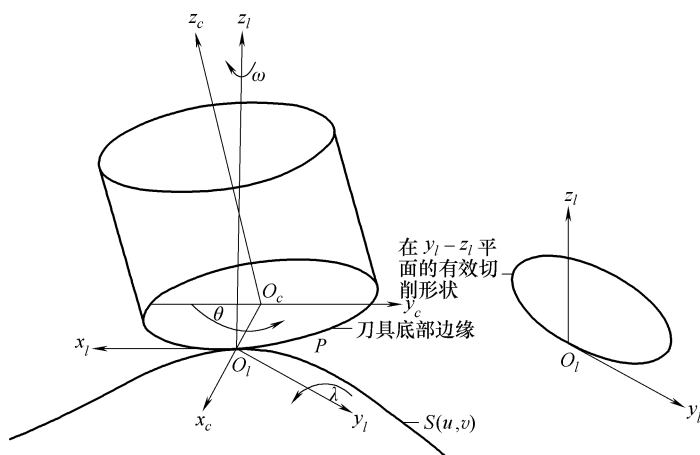


图 3.2 切削操作的几何分析

$$CL = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

然后刀具绕 y_l 轴以 λ 角度倾斜。刀具定位点目前表示如下：

$$CL = \begin{pmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\lambda \\ 0 \\ r\sin\lambda \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

最后，绕 z_l 轴以 ω 角度倾斜刀具：

$$CL = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\cos\lambda \\ 0 \\ r\sin\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\lambda\cos\omega \\ r\cos\lambda\sin\omega \\ r\sin\lambda \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

刀具定位点在工件坐标系中表示如下：

$$CL = CC + (-r\cos\lambda\cos\omega)\mathbf{x}_l + (r\cos\lambda\sin\omega)\mathbf{y}_l + (r\sin\lambda)\mathbf{z}_l \quad (3.21)$$

同样，平头刀底部边缘上的点 P 的坐标在局部坐标系 (O_l, x_l, y_l, z_l) 中表示如下：

$$P = \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{pmatrix} (O_c + P_c) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ -r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (3.22) \\
&= \begin{pmatrix} -r[\cos\lambda\cos\omega(1-\sin\theta) + \sin\omega\cos\theta] \\ r[\cos\lambda\sin\omega(1-\sin\theta) - \cos\omega\cos\theta] \\ r\sin\lambda(1-\sin\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

为了计算切屑宽度,垂直于刀具切削方向 x_l 的表面横截面被近似为一个圆弧,这样半径 R_y 等于沿 y_l 方向的表面法曲率[⊖]的半径,如图 3.3 所示。假定最大皱褶高度 h ,最大加工表面误差由和第一个圆弧同心的半径为 $R_y - h$ 的虚拟圆弧来表示,如图 3.3 所示。通过找出有效切削形状和虚拟圆弧的交叉点,可以获得切屑宽度。

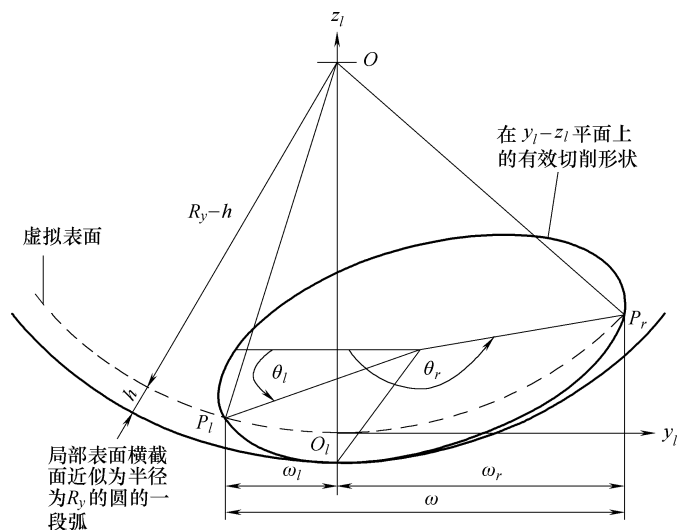


图 3.3 切屑宽度计算

⊖ 对于凹表面,法曲率半径为正,对于凸表面则为负。

设点 P 的 x_l 为零, 将式 (3.22) 投影到 $y_l - z_l$ 平面就可以得到有效切削形状的等式。图 3.3 中的半径为 $R_y - h$ 的虚拟圆弧等式由式 (3.23) 给出:

$$y_l^2 + (z_l - R_y)^2 = (R_y - h)^2 \quad (3.23)$$

将式 (3.22) 代入式 (3.23), 得:

$$c_1 \sin^2 \theta + c_2 \sin \theta + c_3 \sin 2\theta - 2c_3 \cos \theta + c_4 = 0 \quad (3.24)$$

其中

$$c_1 = r^2 (\cos^2 \lambda \sin^2 \omega + \sin^2 \lambda - \cos^2 \omega)$$

$$c_2 = -2r^2 (\cos^2 \lambda \sin^2 \omega + \sin^2 \lambda) + 2rR_y \sin \lambda$$

$$c_3 = \frac{r^2 \cos \lambda \sin 2\omega}{2}$$

$$c_4 = r^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \omega - 2rR_y \sin \lambda + r^2 + 2hR_y - h^2$$

求解式 (3.24), 就可以获得与左右交叉点 P_l 和 P_r (见图 3.3) 对应的 θ_l 和 θ_r 的值。

当 $\omega = 0$ 时, 式 (3.24) 具有闭合式解, 即

$$\theta_l = \arcsin \left(\frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1 c_4}}{2c_1} \right), 0 \leq \theta_l \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.25)$$

$$\theta_r = \pi - \theta_l$$

例如我们关心靠近 CC 点, 即椭圆下边缘上的交叉点的 θ_l 和 θ_r 的解, 当倾角 λ 小或最大皱褶高度大时, 式 (3.24) 和 (3.25) 可能无解或交叉点位于椭圆的上切面之上。这样, θ_l 和 θ_r 变为 θ_{pl} 和 θ_{pr} , 分别和有效切削形状的最左边点和最右边点相对应。求解 $dy_l(\theta)/d\theta = 0$, 可以找出有效切削形状的最左边点和最右边点。对式 (3.22) 中的 y_l 微分:

$$r \cos \lambda \sin \omega \cos \theta - r \cos \omega \sin \theta = 0 \quad (3.26)$$

因此,

$$\theta_{pl} = \arctan(\cos \lambda \tan \omega) \quad (3.27)$$

$$\theta_{pr} = \arctan(\cos \lambda \tan \omega) + \pi$$

当前, CC 点 O_l 处的左边和右边的切屑宽度 ω_l 和 ω_r 表示为

$$\begin{aligned}\omega_l &= |r[\cos\omega\cos\theta_l - \cos\lambda\sin\omega(1 - \sin\theta_l)]| \\ \omega_r &= |r[\cos\omega\cos\theta_r - \cos\lambda\sin\omega(1 - \sin\theta_r)]|\end{aligned}\quad (3.28)$$

整体切屑宽度为

$$\omega = \omega_l + \omega_r \quad (3.29)$$

以上介绍的切屑宽度计算方法和 Lee 与 Ji^[11]使用的方法类似,但有两处不同:

1) CC 点处的局部表面横截面由一个圆弧而不是二次方程来近似,这样可以保持和随后在 3.3 节中介绍的最优化刀具方向及避免刨削的计算的一致性。

2) 用圆弧近似表面横截面,和最大许可加工表面误差 h 相关的偏移曲线可以很容易地利用半径为 $R - h$ 的虚拟圆弧来计算,如图 3.3 所示。相比之下,当使用 Lee 与 Ji 的方法,即通过沿法向 z_l 移动近似局部表面横截面距离 h 计算偏移曲线,加工表面误差或皱褶高度 h 就会被低估,如图 3.4a 所示。然而,因为很小的 h 值,差值 $\Delta h = h - \hat{h}$ 是可以忽略的,如图 3.4b 所示。

3.2.2 球头刀切屑宽度计算

当 $\lambda = \pi/2$ 且 $\omega = 0$ 时,球头刀的切屑宽度计算可以被看作以上介绍的方法的一个特例。这种情况下,式 (3.24) 变为

$$(-2r^2 + 2rR_y)\sin\theta + (2r^2 - 2rR_y) + 2hR_y - h^2 = 0 \quad (3.30)$$

$$\sin\theta = 1 - \frac{2hR_y - h^2}{2rR_y - 2r^2} \quad (3.31)$$

使用三角恒等式 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, 公式 (3.28) 的切屑宽度变为

$$\omega_l = \omega_r = r\cos\theta = r\sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad (3.32)$$

整体切屑宽度如下:

$$\omega = \omega_l + \omega_r = 2r\sqrt{\frac{2hR_y - h^2}{rR_y - r^2} - \left(\frac{2hR_y - h^2}{2rR_y - 2r^2}\right)^2} \quad (3.33)$$

因为实际中 $|R_y| \gg h$, 在式 (3.33) 中由 h^2 、 h^3 和 h^4 构成的量可以

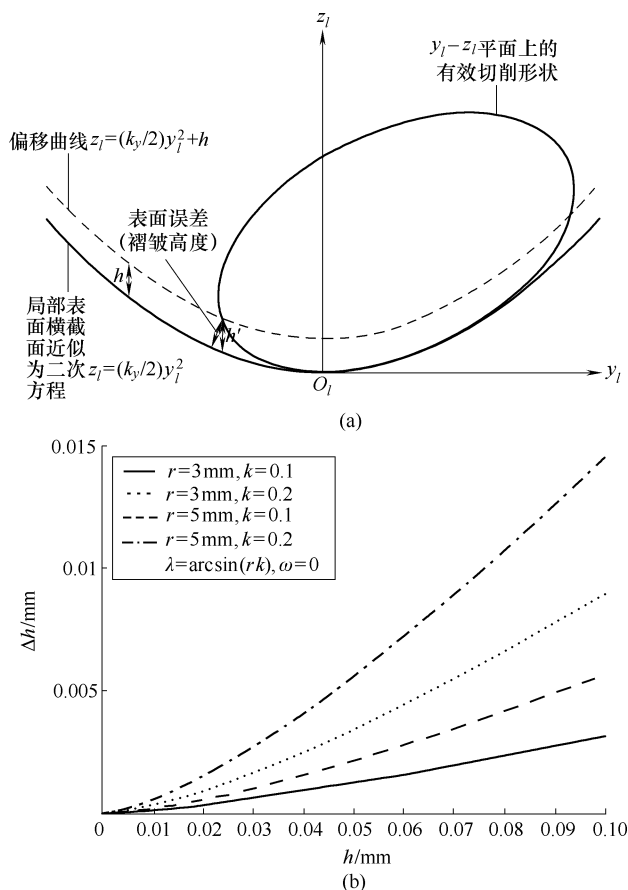


图 3.4 使用 Lee 和 Ji 的方法计算切屑宽度

 (a) Lee 和 Ji 的切屑宽度计算方法 (b) 法曲率为 k , 刀具半径为 r ,

 刀具方向 $(\lambda, \omega) = (\arcsin(rk), 0)$ 时最大许可误差 h 和估算的

 加工表面误差 $\hat{h}$ 之间的差额

忽略。切屑宽度就近似为

$$\omega = \sqrt{\frac{8hrR_y}{R_y - r}} \quad (3.34)$$

它和文献 [12] 中的近似值相同。等式 (3.34) 也被用在文献 [13] 中计算平头刀的切屑宽度, 其中, 刀具半径 r 被有效刀具半径 r_e 代替 (见 3.3 节)。

环形刀具的切屑宽度计算见文献 [2] 中。

3.3 最优刀具方向和避免过切

在五轴加工中,有效切削形状由刀具方向 (λ, ω) 来确定。平头刀的有效刀具半径 r_e 在文献 [13] 中给出如下:

$$r_e = ra^2 \left(\frac{1+b^2}{a^2+b^2} \right)^{3/2} \quad (3.35)$$

其中

$$a = \sin\lambda \cos\omega$$

$$b = \tan\lambda \sin\omega$$

所以它又被简化为

$$r_e = \frac{r \cos^2 \omega}{\sin \lambda} \quad (3.36)$$

为了使切屑宽度最优化, λ 和 ω 通常是指定的, 这样 r_e 才能最好地配合 CC 点处的曲率半径。对于凸面或平面 (见 3.1 节), 刀具倾角 λ 一般被设定为一个很小的角度或零度, 倾角 ω 设为零。如果表面是非凸的, 需要非零的刀具倾角 λ 来避免过切。

Lee 与 Ji^[11] 介绍了一种简单快速的算法, 此算法成为刀具轨迹生成策略的一部分。此算法在面 $x_l - z_l$ 和面 $y_l - z_l$ 找到了一个最小倾角来消除过切, 计算如下:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \max(\lambda_x, \lambda_y) \\ \lambda_x &= \arcsin\left(\frac{r}{R_x}\right) r \leq R_x \text{ 且 } R_x > 0 \\ \lambda_y &= \arcsin\left(\frac{r}{R_y}\right) r \leq R_y \text{ 且 } R_y > 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中, R_x 和 R_y 分别是 x_l 和 y_l 方向的法曲率半径。

然而, 当 R_x 和 R_y 都为负但最大主曲率为正时, 此方法不适合非凸表面。显然, 这种情况下输出 $\lambda_{\min} = 0$ 。这一“故障”通常导致局部

过切。Lo^[13]通过在所有方向不断检查过切解决了这一问题。此外，本书介绍了这些技术的一种改进。

考虑如图 3.2 所示的平头刀。当圆上的任意点接触到或进入表面时就发生过切。 G 为过切点，也是接触到表面的圆上的一点（见图 3.5a）。连接两点 O_l 和 G 的线段在圆上形成了一个弦并与 $\overline{O_l O_c}$ 形成了一个角 φ 。 λ_φ 是刀具倾角，它是 φ 对于刨削点 G 的一个特殊值，避免过切的最小刀具倾角如下式所示：

$$\lambda_{\min} = \max_{-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2} \lambda_\varphi \quad (3.38)$$

Lo^[13]利用最速下降法数值地解决了这一问题。然而可以看到，对于非凸表面的式 (3.38) 的解可以用闭合公式表达：

$$d = 2rc \cos \varphi \quad (3.39)$$

$\mathbf{W}_\varphi$ 是 $\overline{O_l G}$ 方向的单位向量， $\mathbf{W}_\varphi^*$ 是和表面相切的单位向量，这一表面通过将 $\mathbf{W}_\varphi$ 投影到 x_l-y_l 面获得，如图 3.5a 所示。因为 O_l 和 G 都是表面上的点，它们可以用一个圆弧连接，圆弧半径 R_φ 等于方向 $\mathbf{W}_\varphi^*$ 的曲率半径（见图 3.5b）。 λ_φ 是刀具倾角，它是 φ 对于过切点 G 的一个特殊值。将单位向量 $[-1, 0, 0]$ 绕 z_l 轴旋转 φ ，绕 y_l 轴旋转 λ_φ ，因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \lambda_\varphi & 0 & \sin \lambda_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda_\varphi & 0 & \cos \lambda_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda_\varphi \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \lambda_\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$\mathbf{W}_\varphi^*$ 表示为

$$\lambda_{\varphi} = \arcsin(r/R_{\varphi}) = \arcsin(rk_{\varphi}) \quad (3.45)$$

然后, 避免过切的最小倾角 λ 可被表示为

$$\lambda_{\min} = \max_{-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2} \lambda_{\varphi} = \max_{-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2} \arcsin(rk_{\varphi}) = \arcsin(rk_{\max}) \quad (3.46)$$

其中, $k_{\max}$ 是 CC 点处的最大表面曲率。

当仅通过倾斜刀具不能消除过切或倾角 λ 超出机床限制时, 需要寻找倾角 ω 或使用更小的刀具尺寸。设置倾角 ω 的一个算法在文献 [11] 中介绍。

注意: 1) 表面横截面图被近似为一个 y_l-z_l 平面内的圆弧, 此圆弧和一个半径为 R_y 的密切圆对应。这个密切圆是具有恒定曲率的最近似的曲线。这一方法被用在很多实际应用中 (例如见文献 [12, 13])。然而, 仅在 CC 点附近近似值才是准确的。因此, 当切削带本身足够小时, 切削带计算才是准确的。以适当的标准比较表面上的近似圆弧和实际圆弧, 可以检验近似值的适用性。如果精确性不够, 就需要使用高次近似值。

2) 以上基于单一接触点的模型的精确性可能是不够的。这样, 多点策略^[20-22]也被用来进一步提高刀具定位的精确性。

3.4 运动误差

除了控制遗留在连续刀具路径上的皱褶之外, 由于机器运动学的非线性, 步进 (运动学) 误差也需要最小化。两个 CC 点之间的运动学误差被定义为刀具尖端的理论轨迹和实际轨迹之间的差别。刀具尖端轨迹的数学表达如下:

设 k 是变换量, 使 $\forall W, M, R, k^{-1}(k(R, M)) = M$ 且 $k(k^{-1}(R, M)) = W$ 。 $\Pi_p \equiv (M_p, R_p)$, $\Pi_{p+1} \equiv (M_{p+1}, R_{p+1})$ 是刀具轨迹在 R^5 内的两个连续坐标。 M_p 和 W_p 分别指刀具尖端在机床和工件坐标系中的

空间位置, R_p 是对应的一对旋转角。

引用逆运动学, 将工件坐标 W_p 转换为机器坐标 $M_p \equiv (x_p, y_p, z_p)$ 如下: $M_p \equiv k^{-1}(R_p, W_p)$ 。假设旋转角 $R \equiv R(t) = (a(t), b(t))$ 和刀具尖端 $M \equiv M(t)$ 的机床坐标在规定的点之间线性改变, 即

$$M(t) = tM_{p+1} + (1-t)M_p, R(t) = tR_{p+1} + (1-t)R_p$$

其中, t 是一个假时坐标 ($0 \leq t \leq 1$)。对于每一个 t , 将机床坐标 M 转换回工件坐标 W :

$$\begin{aligned} W_{p,p+1}(t) &= k(R(t), M(t)) \\ &= k(tR_{p+1} + (1-t)R_p, tM_{p+1} + (1-t)M_p) \end{aligned} \quad (3.47)$$

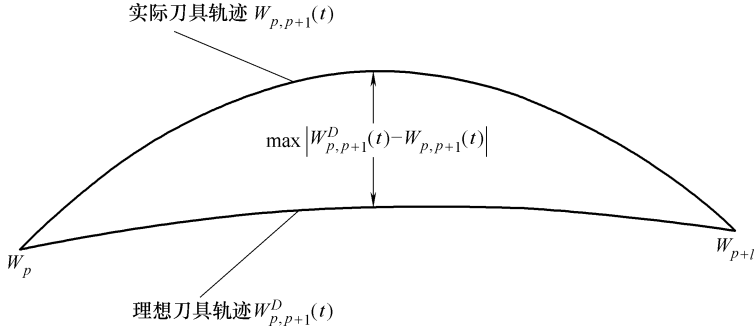
为了使生成的轨迹仅依赖于工件坐标和刀具方向, 现在必须消除机床坐标 M_p 和 M_{p+1} 。利用逆转换 $M_p = k^{-1}(R_p, W_p)$ 消除 M_p 和 M_{p+1} 。将 M_p 和 M_{p+1} 代入 (3.47) 中, 得:

$$W_{p,p+1}(t) = k(tR_{p+1} + (1-t)R_p, tk^{-1}R_{p+1}, W_{p+1} + (1-t)k^{-1}(R_p, W_p)) \quad (3.48)$$

$W_{p,p+1}^D(t) \equiv (x_{p,p+1}^D(t), y_{p,p+1}^D(t), z_{p,p+1}^D(t)) \in S(u, v)$ 是从表面提取出来的 W_p 和 W_{p+1} 之间的一条曲线, 它表示需求的刀具轨迹。用 $W_{p,p+1}^D(t)$ 和 $W_{p,p+1}(t) \equiv (x_{p,p+1}(t), y_{p,p+1}(t), z_{p,p+1}(t))$ 之间的最大偏差表示运动学误差 (见图 3.6), 即

$$\begin{aligned} \theta_{p,p+1} &= \max_{0 \leq t \leq 1} |W_{p,p+1}^D(t) - W_{p,p+1}(t)| \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} [(x_{p,p+1}^D(t) - x_{p,p+1}(t))^2 + (y_{p,p+1}^D(t) - y_{p,p+1}(t))^2 \\ &\quad + (z_{p,p+1}^D(t) - z_{p,p+1}(t))^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

运动学误差不仅依赖于表面特征和刀具方向, 也依赖于先前的旋转^[15]。考虑式 (2.2) 和式 (2.5) 给出的对于 2-0 机器的机器运动学, 如果在任意两点之间的旋转角 a 的角度变化大于 π , 那么由于旋转角 a 的剧烈变化, 就需要调整 a 的后续值使差距最小化, 这一差距是为了消除冗余运动和碰撞。下面是一个例子。使用下列公式之一可

图 3.6 两个刀具接触点 W_p 和 W_{p+1} 之间的运动学误差

以执行 2-0 机器的角度调整，并且不影响需求的刀具方向（见图 3.7 和文献 [15]）。

$$\begin{cases} a_{new} = a_{old} \pm \pi \\ b_{new} = -\pi - b_{old} \end{cases} \quad (3.50)$$

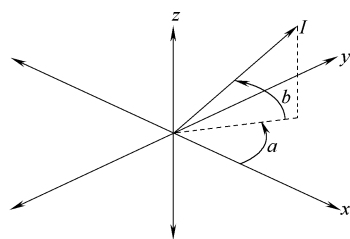
$$\begin{cases} a_{new} = a_{old} \pm 2\pi \\ b_{new} = b_{old} \end{cases}$$

以上公式可以解释如下：对于 2-0 机器，和工件相关的刀具方向可以用两个角 a 和 b 来表示。初始时，和 x 轴在一条直线的刀具首先绕 y 轴旋转 b ，然后绕 z 轴旋转 a （见图 3.7a）。首先将刀具绕 y 轴旋转 $-\pi - b$ ，然后绕 z 轴旋转 $a + \pi$ ，可以获得同样的刀具方向（见图 3.7b）。同样的，首先将刀具绕 y 轴旋转 $-\pi - b$ ，然后绕 z 轴旋转 $a - \pi$ 也获得同样的方向（见图 3.7c）。

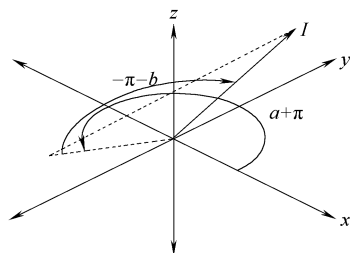
图 3.8 所示为利用角度调整公式将产生的运动学误差最小化。有两个 CC 点 W_1 和 W_2 ，相关的刀具方向 I_1 和 I_2 给出如下：

$$\begin{aligned} W_1 &= [-50.0, -50.0, -40.0] \\ I_2 &= [0, 0.158, 0.987] \\ W_2 &= [-50.0, 10.0, -20.8] \\ I_1 &= [0, -0.625, 0.781] \end{aligned} \quad (3.51)$$

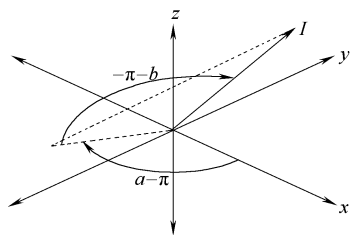
机床旋转角度使用式 (2.5) 计算：



(a)



(b)



(c)

图 3.7 2-0 机床的角度调整

(a) 刀具先绕 y 轴旋转 b , 再绕 z 轴旋转 a

(b) 刀具先绕 y 轴旋转 $-\pi - b$, 再绕 z 轴旋转 $a + \pi$

(c) 刀具先绕 y 轴旋转 $-\pi - b$, 再绕 z 轴旋转 $a - \pi$

$$(a_1, b_1) = (4.7122, -0.896) \quad (3.52)$$

$$(a_2, b_2) = (1.571, -1.412)$$

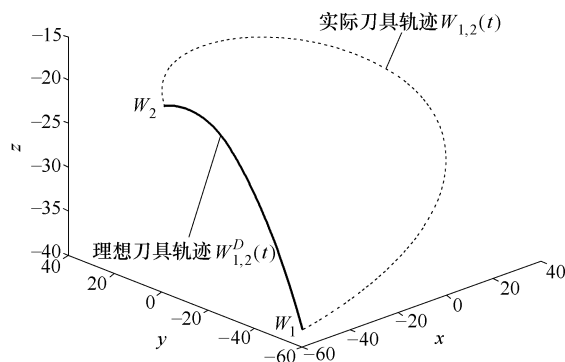
刀具轨迹在图 3.8a 中表示。为了减少误差, a_2 和 b_2 调整如下:

$$a_2^{new} = a_2 + \pi = 4.7126 \quad (3.53)$$

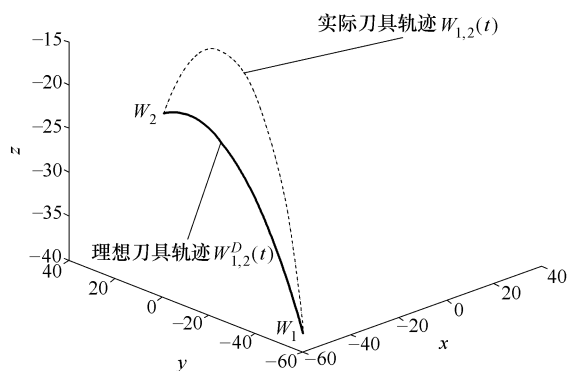
$$b_2^{new} = -\pi - b_2 = -1.7296$$

角度调整之后的刀具轨迹如图 3.8b 所示。角度调整可以同时用于

刀具轨迹上的一系列点,但是如果两点之间的运动学误差依然超出规定的公差,在两点之间会插入一个新的点(见第6章)。



(a)



(b)

图 3.8 利用角度调整将产生的运动学误差最小化

(a) 未调整之前的刀具轨迹 (b) 角度调整之后的刀具轨迹

3.5 刀具轨迹生成

3.1~3.4节提供了刀具轨迹生成需要的必要信息。在文献中介绍了大量的刀具轨迹生成技术(见来自于 Dragomatz 和 Mann^[3]以及 Sarma^[17])。刀具轨迹生成技术可以被分为两大类:等参数刀具轨迹

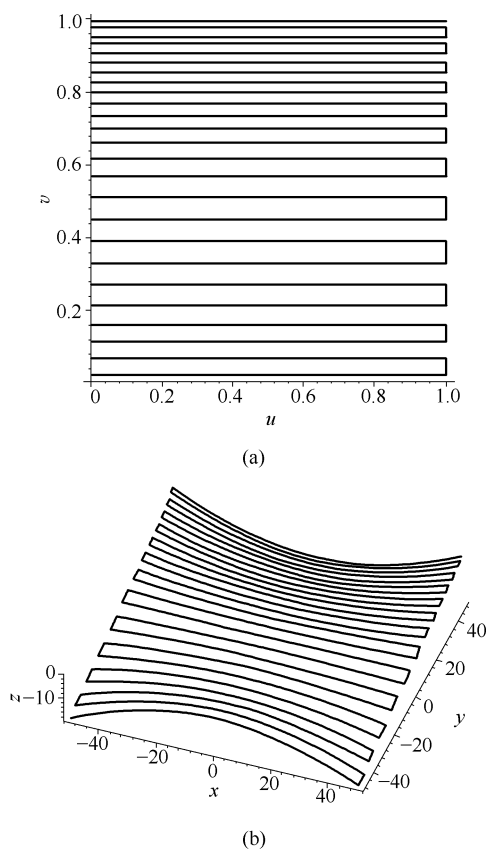


图 3.10 等参数刀具轨迹实例

(a) 实例一 (b) 实例二

参 考 文 献

- [1] Bobrow, J. E. 1985. NC machine tool path generation from CSG part representations. *Computer Aided Design*, 17(2):69–76.
- [2] Chiou, C.-J. and Lee, Y.-S. 2002. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 34(5):357–371.
- [3] Dragomatz, D. and Mann, S. 1997. A classified bibliography of literature on NC milling path generation. *Computer-Aided Design*, 29(3):239–247.
- [4] Elber, G. and Cohen, E. 1994. Toolpath generation for freeform surface models. *Computer-Aided Design*, 26(6):490–496.

- [5] Griffiths, J. G. 1994. Toolpath based on Hilbert's curve. *Computer-Aided Design*, 26(11):839–844.
- [6] Hatna, A. and Grieve, B. 2000. Cartesian machining versus parametric machining: a comparative study. *International Journal of Production Research*, 38(13):3043–3065.
- [7] Jensen, C. G., Red, W. E., and Pi, J. 2002. Tool selection for five-axis curvature matched machining. *Computer-Aided Design*, 34(3):251–266.
- [8] Jeong, J. and Kim, K. 1999a. Generating tool paths for free-form pocket machining using z-buffer-based Voronoi diagrams. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(3):182–187.
- [9] Jeong, J. and Kim, K. 1999b. Generation of tool paths for machining free-form pockets with islands using distance maps. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(5):311–316.
- [10] Lee, Y.-S. 1998. Non-isoparametric tool path planning by machining strip evaluation for 5-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 30(7):559–570.
- [11] Lee, Y.-S. and Ji, H. 1997. Surface interrogation and machining strip evaluation for 5-axis CNC die and mold machining. *International Journal of Production Research*, 35(1):225–252.
- [12] Lin, R.-S. and Koren, Y. 1996. Efficient tool-path planning for machining free-form surfaces. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 118(1):20–28.
- [13] Lo, C. C. 1999. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 31(9):557–566.
- [14] Makhanov, S. S., Batanov, D., Bohez, E., Sonthipaumpoon, K., Anotaipaiboon, W., and Tabucanon, M. 2002. On the tool-path optimization of a milling robot. *Computers & Industrial Engineering*, 43(3):455–472.
- [15] Munlin, M.-A., Makhanov, S. S., and Bohez, E. L. J. 2004. Optimization of rotations of a five-axis milling machine near stationary points. *Computer-Aided Design*, 36(12):1117–1128.
- [16] Park, S. C. and Choi, B. K. 2000. Tool-path planning for direction-parallel area milling. *Computer-Aided Design*, 32(1):17–25.
- [17] Sarma, R. 2000. An assessment of geometric methods in trajectory synthesis for shape-creating manufacturing operations. *Journal of Manufacturing Systems*, 19(1):59–72.
- [18] Suh, S. H. and Shin, Y. S. 1996. Neural network modeling for tool path planning of rough cut in complex pocket milling. *Journal of Manufacturing Systems*, 15(5):295–304.
- [19] Wang, Y. and Tang, X. 1999. Five-axis NC machining of sculptured surfaces. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(1):7–14.
- [20] Warkentin, A., Ismail, F., and Bedi, S. 1998. Intersection approach to multi-point machining of sculptured surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 15(6):567–584.

- [21] Warkentin, A., Ismail, F., and Bedi, S. 2000. Multi-point tool positioning strategy for 5-axis machining of sculptured surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 17(1):83–100.
- [22] Yoon, J.-H. 1997. Tool tip gouging avoidance and optimal tool positioning for 5-axis sculptured surface machining. *International Journal of Production Research*, 41(10):2125–2142.

第 4 章 空间填充曲线的刀具路径

4.1 空间填充曲线的发展史及其应用

N 维空间填充曲线是从单位区间 $[0, 1]$ 到单位 N 维立方体 $[0, 1]^N$ 的连续满射[⊖]函数。尤其是二维空间填充曲线，是通过单位正方形 $[0, 1]^2$ 内每个点的连续曲线。

空间填充曲线起源于 1878 年，George Cantor (1845—1918) 证明了空间任意有限维的任何两个光滑流形具有相同的基数。Cantor 的发现表明了单位线段 $[0, 1]$ 可以被双射[⊖]到单位正方形 $[0, 1]^2$ 上。然而 1879 年，Eugen Netto (1848—1919) 证明了这种映射必须是不连续的，不能称之为曲线。如果不满足这个双射条件，Giuseppe Peano (1858—1932) 在 1890 年发现了一个从区间到平面的连续映射。这是空间填充曲线的第一个例子，如图 4.1 所示。后来更多的例子被 Hilbert (1891 年，见图 4.2)，E. H. Moore (1900 年)，H. Lebesgue (1904 年)，W. Sierpiński (1912 年)，G. Pólya (1913 年) 等发现。

空间填充曲线 (SFC) 被应用于计算机科学的不同领域，尤其在[⊖]这些领域内使多维数据线性化显得非常重要。多维数据例如矩阵、图形、数表及计算网格都产生于离散化的偏微分方程 (PDEs)。空间填充曲线的典型应用是数据索引^[14,20]、数据的存储和检索^[25]、图像处

⊖ 具有定义域 X 和值域 Y 的函数 f 是满射的，对于其值跨越的整个值域，则 Y 中的每一个 y ， X 至少存在一个 x ，使 $f(x) = y$ 。

⊖ 具有定义域 X 和值域 Y 的函数 f 是双射的，则对于 Y 中的每一个 y ， X 中只有一个 x ，使 $f(x) = y$ 。

理^[26,28]、图像扫描和编码^[5,7,27]、网格分割以及重新排序^[24]等。

随着空间填充曲线的多样性和多维应用的广泛扩展，为某个特定应用选择合适的空间填充曲线已经不再是一项琐碎的任务。根据文献 [1] 中的分类，空间填充曲线可以被分为两类：递归空间填充曲线和非递归空间填充曲线。递归的空间填充曲线的例子见图 4.1 中的 Peano 曲线及图 4.2 中的 Hilbert 曲线。大多数空间填充曲线都用的是递归空间填充曲线。空间填充曲线的递归规则允许递归的分级数据结构线性化。

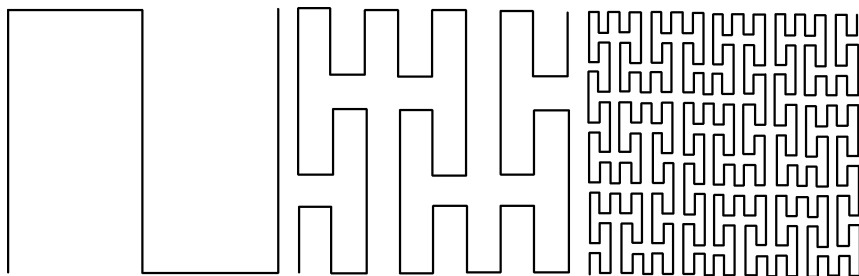


图 4.1 Peano 空间填充曲线的 3 次迭代

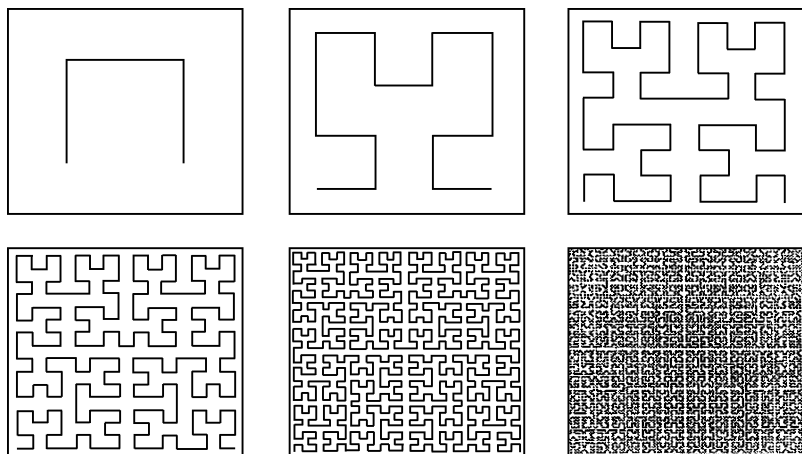


图 4.2 Hilbert 空间填充曲线的 6 次迭代

空间填充曲线最有利的特点之一是它的局部性及其线性化容易估算。局部性意味着一条空间填充曲线以任意精确度通过一个区域内的

所有点之前都不会偏离这个区域，而在多维空间邻近的数据在线性化后依然保持邻近。

在这一章中，我们提出了空间填充曲线作为刀具路径的应用。给出位于平面上的一系列 CC 数据，空间填充曲线刀具路径可以看作是一条唯一通过平面上每个 CC 点的曲线。我们也考虑到用非递归空间填充曲线使曲线沿最佳切削方向延伸。

4.2 刀具路径的最优化

五轴数控机床的编程要求考虑很多重要问题，例如优化刀具路径、避免切削干涉和提高切削效率。刀具路径的优化是基于切削时间、褶皱深度、切削路径的长度、加工带的宽度、移除材料的体积等问题而提出的。一套完整的优化方案应包括切削程序的设计、描述刀具路径类型的布局、一系列的约束和优化程序（可参考文献 [18]）。

令 $S=S(u, v)$ 为满足要求的表面， M 是与工件结构和机床配置有关的一系列参数， Σ 是刀具参数比如刀具长度、刀具直径及刀具形状。一个切削工序的设计，将参数 S 、 Σ 、 M 和 Π 输入产生一个加工结果，输出表面 $T=T(u, v)$ 。总体的优化问题可被确切描述为

$$\min_{\Pi, \Sigma, M} \varepsilon \quad (4.1)$$

其中， $\varepsilon = \|S - T\|$ 是以一个恰当适当规范描述的误差。优化是基于下列限制所提出的：

1) 褶皱深度：处于连续刀具轨迹间的褶皱不能超出规定的公差范围^[16,18]。

2) 局部可达性：当刀具逐渐切入设计表面时，多余材料不必移除。过多地移除材料一般是由于曲率干涉和表面干涉^[10,11,21]造成的。

3) 总体可达性：刀具既不能切入机床零部件，也不能切入设计表面不需要去除的那部分材料^[13]。这就意味着碰撞检验必须包含在优化程序之中。

一系列的独立变量包括刀具的空间位置和方向、机床零部件的旋转、刀具的形状及尺寸。一般来讲,刀具是按照Z字形或螺旋形来到达规定位置的。然而,优化也可以使用结构较为复杂的形式来使某项指标最小化或降低。

我们提出利用空间填充曲线生成刀具路径的方法在五轴数控机床上加工雕刻曲面。运用空间填充曲线于数控刀具路线的生成在文献[8]和文献[6]首次提出。Griffiths^[8]提出利用 Hilbert 曲线生成刀具轨迹,而 Cox 等^[6]却运用多种空间填充曲线(例如 Moore 曲线)来生成刀具路径。这两种刀具路径的生成方法都在使用球头刀的三轴数控机床上得到了应用。然而,空间填充曲线还没有被广泛应用于五轴数控系统中,因为在描述标准空间填充曲线样式时,由于尖角转向会产生巨大的误差。

尽管如此,基于空间填充曲线的刀具轨迹生成也有很吸引注意的方面,例如在不改变整体结构的情况下能够局部拟合曲线的可能性,使用这种方法切削刀具将会沿着最佳的方向进行切削。另外,整个切削表面也是用一种刀具路径加工出来的,减少了退刀的麻烦。

本书提出利用适应性空间填充曲线生成刀具路径,既保持了前面所提到的优点,也弥补了前面提到的不足。要生成刀具路径,与 Hilbert 曲线相比,适应性空间填充曲线是个较好的选择。首先, Hilbert 曲线只适合于 $2^n \times 2^n$ 的网格,而适应性空间填充曲线可以被用于任何矩形网格和块结构网格(空间填充曲线生成刀具路径在块结构网格方面的应用在第5章中介绍)。第二,相对于在每一个点处^[12]都有四分之三旋转比率的 Hilbert 曲线,适应性空间填充曲线仅仅是在需要的时候才转向,即当最佳切削方向改变的时候。由于尖角处的转向会产生很多的运动误差^[19],因而适应性空间填充曲线就比常规空间填充曲线要好得多(我们在4.3节也会讨论到)。

利用空间填充曲线生成刀具路径的方法有三步:构造网格、生成适应性空间填充曲线和更正刀具路径。最简单的矩形网格可以通过覆

盖两个由传统等参数方案生成的之字形刀具路径来构造。然后网格就被由 Hamiltonian 轨迹算法生成的空间填充曲线所填充。最后, 刀具轨迹和刀具方向都在转向处进行调整, 以消除切削设备剧烈改变方向时引起较大的运动误差。

考虑下列有关刀具轨迹长度的优化问题:

$$\min_{\Pi} L, \text{ 在 } h < h_{\max}, \varepsilon < \varepsilon_{\max} \text{ 时} \quad (4.2)$$

其中, Π 是刀具路径代表一系列位置和方向 (所谓 CL 数据, 见 2.1 节), h 代表皱褶深度, $h_{\max}$ 表示允许最大的皱褶深度。如果加工带不重叠, 剩余面积也被视为皱褶。因此, 第一个约束条件不但控制了皱褶, 而且保证了加工带能够覆盖整个表面; 第二个约束条件要求对于实际和理论轨迹中不同的 ε 都不能超过规定的偏差 $\varepsilon_{\max}$ 。以上两个条件只是对加工表面不能偏离实际表面超过 $h_{\max}$ 和 $\varepsilon_{\max}$ 这个一般要求的粗略估计。 L 的最小值是以这种最大限度地利用加工带宽度的方式提出的。然后将增加加工带宽度与空间填充曲线的策略相结合, 使刀具能够沿着最短路径对表面进行切削。

第一个约束条件即皱褶高度约束是通过构造两个重叠的等参数的之字形路径而被满足的。这种路径满足给定的表面曲率、刀具形状和型号以及皱褶高度约束。第二个约束条件是通过移除尖角转向产生大的误差及增加额外的切削接触点满足的。

4.3 利用适应性空间填充曲线生成刀具路径

应用最为广泛的空间填充曲线需要考虑很多因素, 包括刀具轨迹设计的递归 Hilbert 曲线^[12]。Hilbert 曲线特别具有吸引力的是刀具轨迹设计, 因为它的精细性可以被用于适当地增加路径的密度。然而, 每条基于 Hilbert 曲线的刀具轨迹的精细性都在精确区域内增加刀具轨迹密度, 由于增加了刀具轨迹的长度, 从而导致了较低的加工效率。另外, Hilbert 曲线还有一个容易使刀具不断改变方向的缺点, 这就使得

加工过程缓慢而且会引起很大的运动误差。

为了弥补这些缺陷,适应性空间填充曲线被用于生成刀具路径。对其特点描述如下:首先,适应性空间填充曲线总是遵循局部优化方向;第二,相对于常规的 SFC,适应性空间填充曲线只在需要时转向,也就是当优化方向改变的时候;第三,适应性空间填充曲线消除了较大运动误差的出现和由于尖角转向而引起的过度切削;最后,适应性空间填充曲线的局部精细化处理以与常规 SFC 的实现方式一样。

适应性空间填充曲线生成的一个问题是 Hamiltonian 路径关于在 (u, v) 平面中包括 CC 点在内的网格图表为例进行精确描述的。运算法则包括三步:构造网格、空间填充曲线的生成和更正刀具路径。

4.3.1 网格构造

图 4.3 所示为由两个等参数刀具路径叠加而得的网格 $m \times n$ 。等参数路径的生成是通过计算最小刀具轨迹间隔并将其作为下一个刀具路径的连续偏移(见 3.5 节)。刀具路径间隔依赖于局部表面形状、切削刀具的形状和尺寸以及允许的皱褶高度。此外,两个相邻切削刀具路径(图 3.9)的加工带宽度必须重叠,以保证加工表面的误差(皱褶高度)在公差范围内。计算加工带宽度的算法在 3.2 节给出。

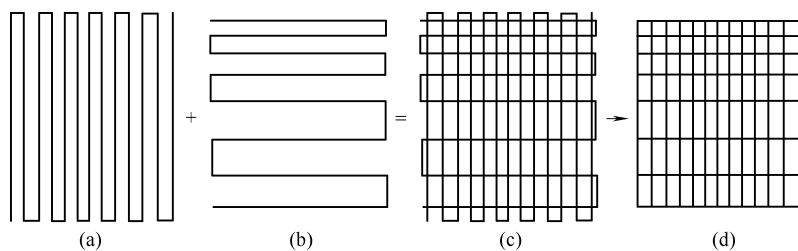


图 4.3 两个等参数刀具路径叠加而得的网格

(a) 在 v 方向上的等参数刀具路径 (b) 在 u 方向上的等参数刀具路径

(c) 两个等参数刀具路径的迭代 (d) 最终的网格

此外,网格被看作是一个每两个相邻顶点都用边缘线连接起来的

无向图 G ，如图 4.3d 所示。图的顶点相当于最初的一系列在必需平面上的 CC 点，而两个相连接顶点间的距离就是在三维空间 R^3 内对应的 CC 点之间的距离。注意切削刀具沿着在任意两个相连接顶点之间的路径满足皱褶深度约束。这个特征允许依靠空间填充曲线来优化刀具路径。空间填充曲线刀具路径生成的算法会在下面讲到。

4.3.2 空间填充曲线的生成

关于构造网格图表的刀具路径生成，在 4.3.1 节是被看作是 Hamiltonian 路径问题^[22]来确切描述的。找一条距离很短的路径只不过是个旅行商问题。既然这是个 NP-hard^[9]问题，寻找最优化方案的算法求解较慢且效率低。

在这本书中，提出了一种简单且计算效率高的 Hamiltonian 轨迹算法。该算法是基于由 Dafner 等^[7]为了二维图像扫描而开发的覆盖合并算法。Hamiltonian 轨迹算法被应用扩展到任意矩形网格中。另外，为 SFC 刀具轨迹生成而修改的方案在 4.3.3 中会做具体描述。

首先，不相交的回路经过所有顶点，然后回路被合并为单独的 Hamiltonian 回路。最初的回路是由小矩形环状轨迹通过相邻 4 个顶点连接起来的，然后将偶数行和列的顶点和奇数行和列上的顶点连接起来，如图 4.4a 所示。另外，如果 m 或 n 是奇数，则将顶点沿着边界用短划线连接成虚线回路，如图 4.4b 所示。相邻回路可连接成一个较大的回路。合并的代价按照下式计算。

$$\text{Cost}(A, B) = |s| + |t| - |e| - |f| \quad (4.3)$$

其中， $|e|$ 表示在 R^3 中由边缘线 e 连接两个顶点间的距离。

合并两个虚线回路的代价设为 $-\infty$ ，即所有的虚线回路开始时都被连接起来。这样就保证了刀具路径从 Hamiltonian 轨迹移除虚线边后依然是连续的。而且，实线回路 A 可与一个虚线回路 D 合并，仅当 A 与位于相反方向的实线回路 C 合并时。为了实现这个合并属性，将 A 与 D 的合并代价等于 A 与 C 的合并代价。这种合并属性被用于减少沿着边界有大量拐点的不合适的狭窄的之字形刀

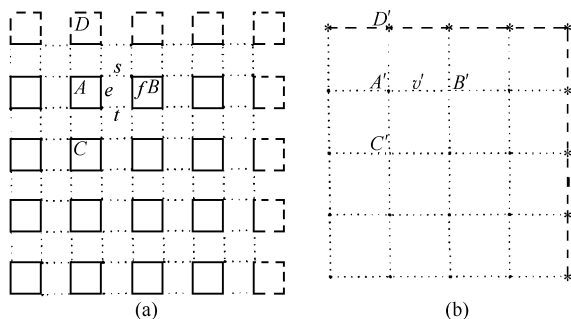


图 4.4 无向图和对偶图

(a) 被初始回路覆盖的无向图 G (b) 对偶图 G'

具路径生成的可能性（见图 4.11）。

对偶图 G' 首先被构造出来以合并所有小回路，如图 4.4b 所示。 G 中的每个小回路在 G' 中都定义了一个顶点，而且 G 中连接 A 与 B 两个小回路的两条边 s 和 t 在 G' 中也定义了一个边 v' 。然后根据 4.3 节中定义的那样，通过重复合并回路构造了一个小生成树。图 4.5 除了构造对应的最小生成树之外，还阐明了合并算法。在所有回路都被合并为 Hamiltonian 回路后，通过移除所有回路边缘而生成了刀具轨迹，具体如图 4.5c 所示。令 T 为一系列边缘最小生成树，合并算法如下。

1) 设 $T = \phi$ ，将 G' 的边按合并代价以升序排序。如果出现一个结，将连接两个顶点的边排在前面。

2) 考虑第一个未通过的边线。将其包括在 T 中，当且仅当它与其他 T 的边在对偶图 G' 中没形成回路，且也不违背合并属性。

3) 若边放入 T 中，合并 G 中的两个回路，其相当于用新增加的边连接 G' 中的两个顶点，然后进入第 4) 步，否则返回第 2) 步。

4) 如果 T 包括 $n - 1$ 条边（其中 n 代表 G' 中顶点的数量），停止并输出 Hamiltonian 回路结果，否则返回到第 2) 步。

4.3.3 刀具路径更正

按照上面的步骤生成的刀具路径还有两方面需要修改：第一，刀具路径的轨迹应该被修改以消除底切；第二，当刀具改变方向时，刀

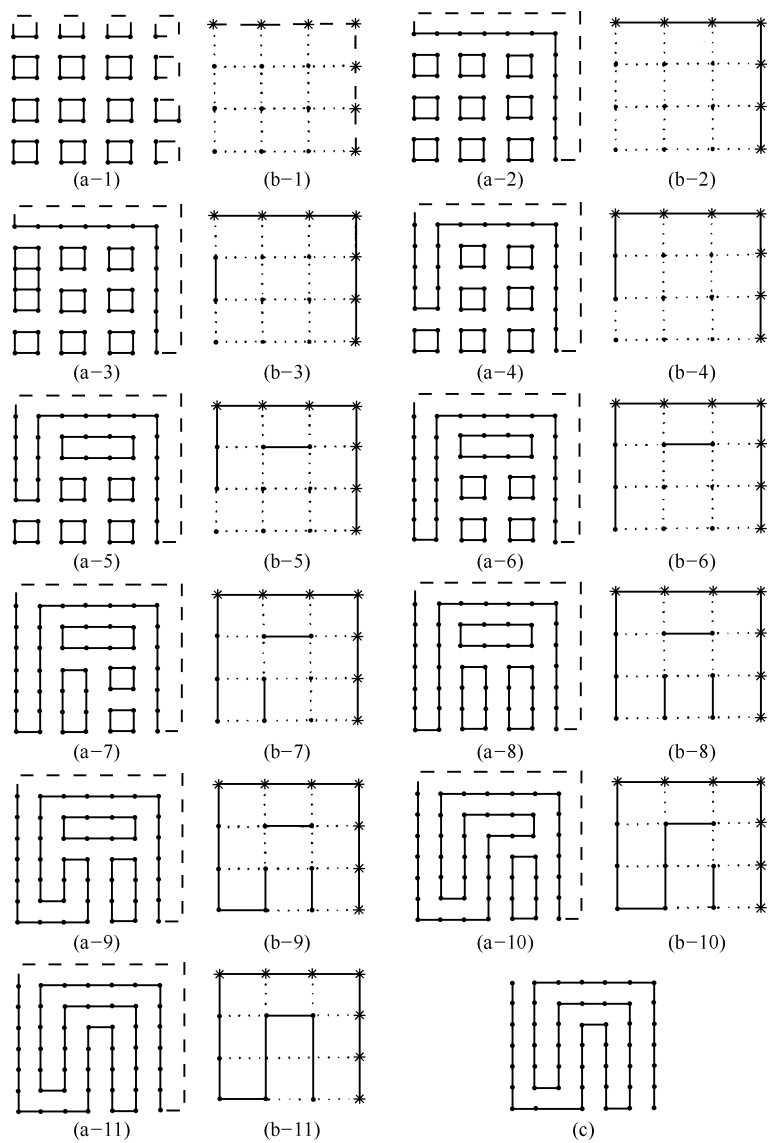


图 4.5 刀具轨迹的生成

(a) 通过小回路合并构造的 Hamiltonian 环路 (b) 最小生成树 (c) 生成的刀具轨迹

具方向也要作仔细调整。

刀具路径的调整是必要的，因为当刀具改变方向时，空间填充曲线刀具路径上的转向会致使刀具错过某些加工表面区域。在每一个转向处，两条相邻刀具路径沿不同方向切削形成的切削带不

会重叠而形成底切，或重叠部分不足而产生了很明显的褶皱（见图 4.6）。

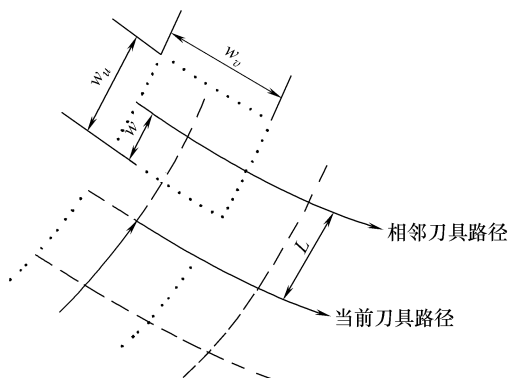


图 4.6 在相邻刀具路径上通过使用空间填充曲线生成的加工带(短画线)

为了消除这种表面误差，刀具路径在转向处应该修改以便相邻刀具路径形成的加工带能够重叠。图 4.7 所示的是在转向处而且是 U 转向处两个刀具路径的改变。在这些转向处，刀具路径进行延伸为了能重叠相邻刀具路径形成的切削带。最小延伸距离为

$$L_{\text{ext}} = L - w \quad (4.4)$$

其中， L 和 w 表示刀具路径间隙和切削带宽度，分别在图 4.6 中标出。

第二个调整是针对刀具方向。刀具方向通常被指定刀具从 y_i 轴向 x_i 轴（见 3.2 节中定义）旋转一个倾斜角 λ 。在尖角转向处，刀具方向的突然改变会引起大的运动误差。该误差不能按照常规在刀具路径部分^[2,17]仅靠插入更多的点来缩小。另外，新插入的 CC 点的刀具方向应该通过两个相邻 CC 点间对刀具方向进行插值而获得。调整刀具方向时务必要细心，因为改变刀具方向会减小切削带的宽带而留下底切。参考图 4.7 中所示的尖角转向 $O-P-Q$ ，为了能正确地转向， x_i 轴在点 P 处被重新定义为一个单位表面切矢量，该单位表面切矢量位于刀具切削方向上的前一个 CC 点 O 处。为了减小运动误差，当沿着点 P 到点 Q 时，一个新点 P' 被插入，而且 x_i 轴上 P' 点是用两个相邻的 CC 点 P 和 Q 插入的，即

$$x_{l,P'}^* = x_{l,P'} + x_{l,Q'} \quad (4.5)$$

P' 点的 x_l 轴是通过计算在相切平面上的 $x_{l,P'}$ 投影的单位矢量得到的。这一过程一直重复进行,直到任意两个相邻的 CC 点间的运动误差缩小至公差范围内为止。

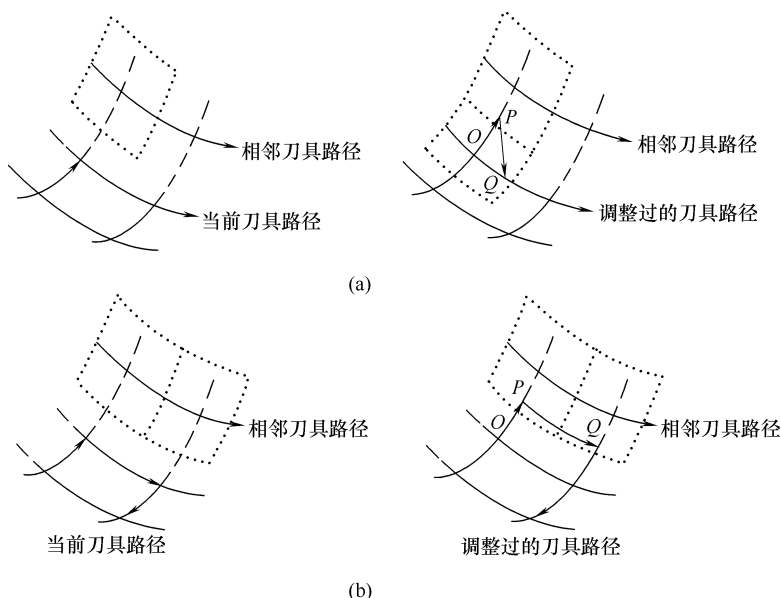


图 4.7 在转向处 (左或右) 和 U 形转向处刀具轨迹的改变

(a) 在转向处刀具轨迹的改变 (b) 在 U 形转向处刀具轨迹的改变

图 4.8 所示为刀具路径修正的前、后,刀具有效切削刃的轨迹被投影到 x - y 平面上的情况。

注意 4.1 节提到的 SFC 刀具路径生成技术被应用于一般刀具几何形状 (所谓的 APT 刀具^[3,4])。在这种情况下,计算有效切削面需要一个数值的程序。刀具倾斜度与有效切削面之间的关系一旦被确定,提供无刨削刀具轨迹的最小刀具倾斜度就能被计算出来。接下来,给定刀具倾斜度,就能计算等参数刀具轨迹和网格。然后所提出的 SFC 生成算法就可以运行了。

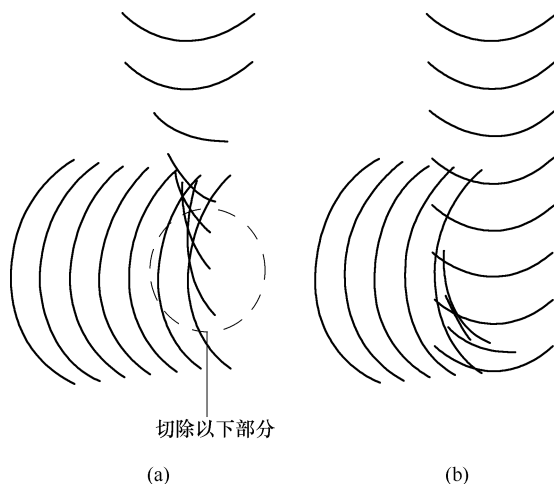


图 4.8 在应用刀具路径修正前、后, 刀具有效切削刃的轨迹

(a) 修正前在 $x-y$ 平面上投影的刀具有效切削边缘轨迹 (b) 修正后在 $x-y$ 平面上投影的刀具有效切削边缘的轨迹

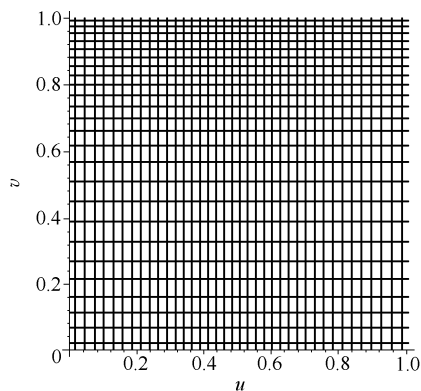
4.4 实例和讨论

这一节通过实例和实际加工来阐述前面所提出的刀具轨迹生成算法的有效性。在所有的例子中, 平头刀的刀具半径 $r = 3\text{mm}$, 加工表面公差 $h = 0.01\text{mm}$ 。

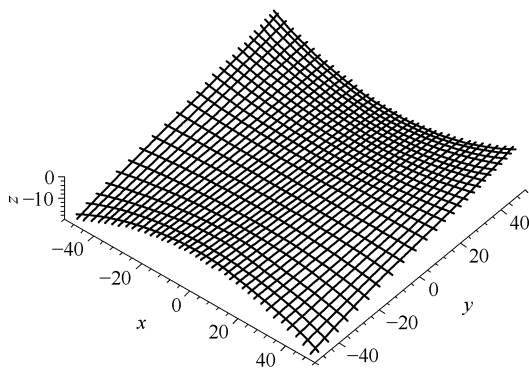
(1) 例 4.1 如图 4.9 所示, 一个三次 Bezier 表面, 既有凸形区域又有凹形区域。这个表面被描述为

$$\begin{aligned}
 P_x &= \begin{pmatrix} -50 & -50 & -50 & -50 \\ -15 & -15 & -15 & -15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix} \\
 P_y &= \begin{pmatrix} -50 & -15 & 15 & 50 \\ -50 & -15 & 15 & 50 \\ -50 & -15 & 15 & 50 \\ -50 & -15 & 15 & 50 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$P_z = \begin{pmatrix} -20 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & -20 \\ 0 & -10 & -10 & -20 \\ -20 & -10 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$



(a)



(b)

图 4.9 对于例 4.1 中的表面在 (u, v) 区域和在工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠

(a) 例 4.1 中的表面在 (u, v) 区域两个等参数刀具路径的重叠

(b) 在工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠

其中, P_x , P_y , P_z 是 16 个控制点的 x , y , z 坐标。利用重叠两个

等参数刀具轨迹构造的网格如图 4.9 所示。刀具轨迹的结果如图 4.10 和 4.11 所示。刀具轨迹更正用于切削加工前、后的加工结果,如图 4.12 和图 4.13 所示。很明显,在保证表面质量的同时,这种方法能将未被移除的多余材料去除。表 4.1 所示为就刀具轨迹长度而言, SFC 刀具路径对等参数刀具路径的情况。

表 4.1 SFC 刀具路径与等参数刀具路径的刀具轨迹长度

刀 具 路 径	刀具轨迹长度/mm		
	例 4.1	例 4.2	例 4.3
在 v 方向上的等参数	3917.31	9397.97	7831.70
在 u 方向上的等参数	2648.12	9397.97	9036.17
SFC 刀具路径	2637.54	7955.58	6780.84

(2) 例 4.2 该例中描述了 SFC 在驻点处用于较高的凸面。设想一个对称的钟形参数表面由下式给定:

$$\begin{aligned}
 x &= -50 + 105u - 15u^2 + 10u^3 \\
 y &= -50 + 105v - 15v^2 + 10v^3 \\
 z &= -100 + 900(uv - u^2v - uv^2 + u^2v^2)
 \end{aligned}
 \quad (4.7)$$

由重叠两个等参数刀具轨迹生成的网格如图 4.14 所示。很明显,沿着钟形的顶部切削距离最长,而且由于在钟形顶部有较高凸面而产生了最窄的切削带宽^[15]。如图 4.15 所示的 SFC 刀具轨迹生成不仅适于优化方向,而且能避免刀具经过钟形的顶部。

(3) 例 4.3 最后一个例子描述了这样的情况,上面所提的技术与传统等参数刀具轨迹方法相比应用得更加广泛。假想下面的等式描绘的是一个双钟形曲面:

$$\begin{aligned}
 x &= 100u - 50 \\
 y &= 100v - 50 \\
 z &= 400v(1 - v) (3.55u - 14.8u^2 + 21.15u^3 - 9.9u^4) - 28
 \end{aligned}
 \quad (4.8)$$

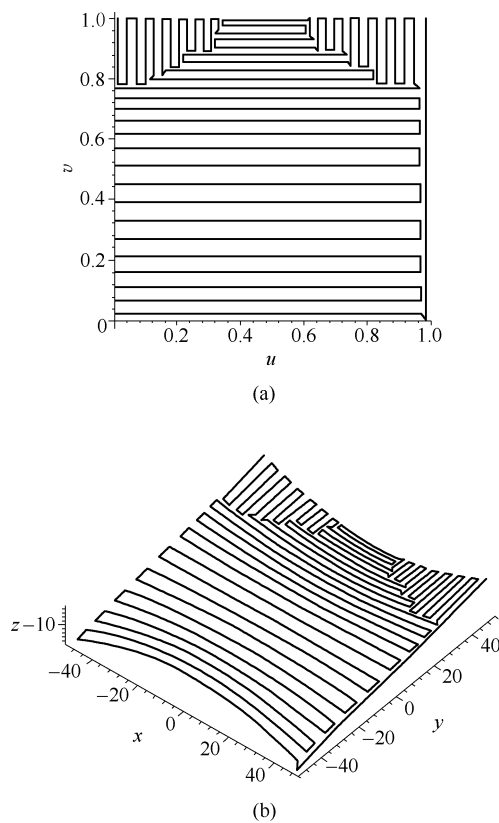


图 4.10 对于例 4.1 中的表面在 (u, v) 区域和工件坐标系中的 SFC 刀具路径

(a) 例 4.1 中的表面在 (u, v) 区域中的 SFC 刀具路径

(b) 例 4.1 中的表面在工件坐标系中的 SFC 刀具路径

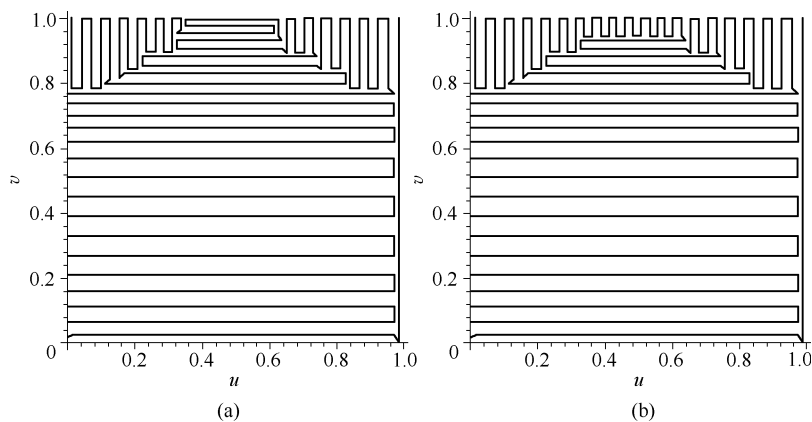


图 4.11 对于例 4.1 中刀具路径的合并和不合并的情况

(a) 例 4.1 中刀具路径的合并情况 (b) 例 4.1 中刀具路径的不合并情况

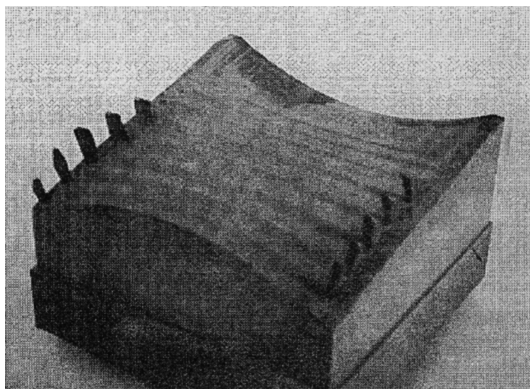


图 4.12 应用没修正过的 SFC 刀具路径的实际加工

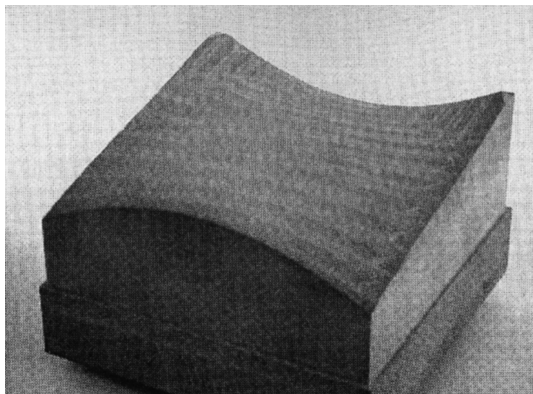


图 4.13 应用修正过的 SFC 刀具路径的实际加工

图 4.16 描绘的是通过重叠两个等参数刀具轨迹的网格生成。刀具轨迹的结果在图 4.17 中表示。用 Unigraphics18 证明了刀具轨迹，而且模拟结果在图 4.18 中显示。

就刀具轨迹长度这个问题而言，刀具轨迹生成方法与传统等参数方法的比较在表 4.1 中给出。从结果来看，当满足要求的可比较的表面包含不同优化切削方向时，与等参数刀具轨迹（例 4.2 和例 4.3）相比，SFC 刀具轨迹实现了大幅度的改进（见图 4.14 和图 4.16）。然而，当大部分优化切削只有一个方向时，通过所提到的覆盖与合并算法生成的 SFC 刀具路径就不一定是最好的（例 4.1，见图 4.9）。

注意 4.2 节中 SFC 刀具轨迹的优化是基于总的刀具轨迹长度最小时提出的。然而对于其他的变量如加工所需表面的时间等，刀具轨迹

也是可以被优化的。给定两个 CL 点之间各轴的增量 Δx_m 、 Δy_m 、 Δz_m 、 Δa 、 Δb 、进给速率 F ，加工时间 t_m 计算如下：

$$t_m = \max \{ t_0, \quad t_x, \quad t_y, \quad t_z, \quad t_a, \quad t_b \} \tag{4.9}$$

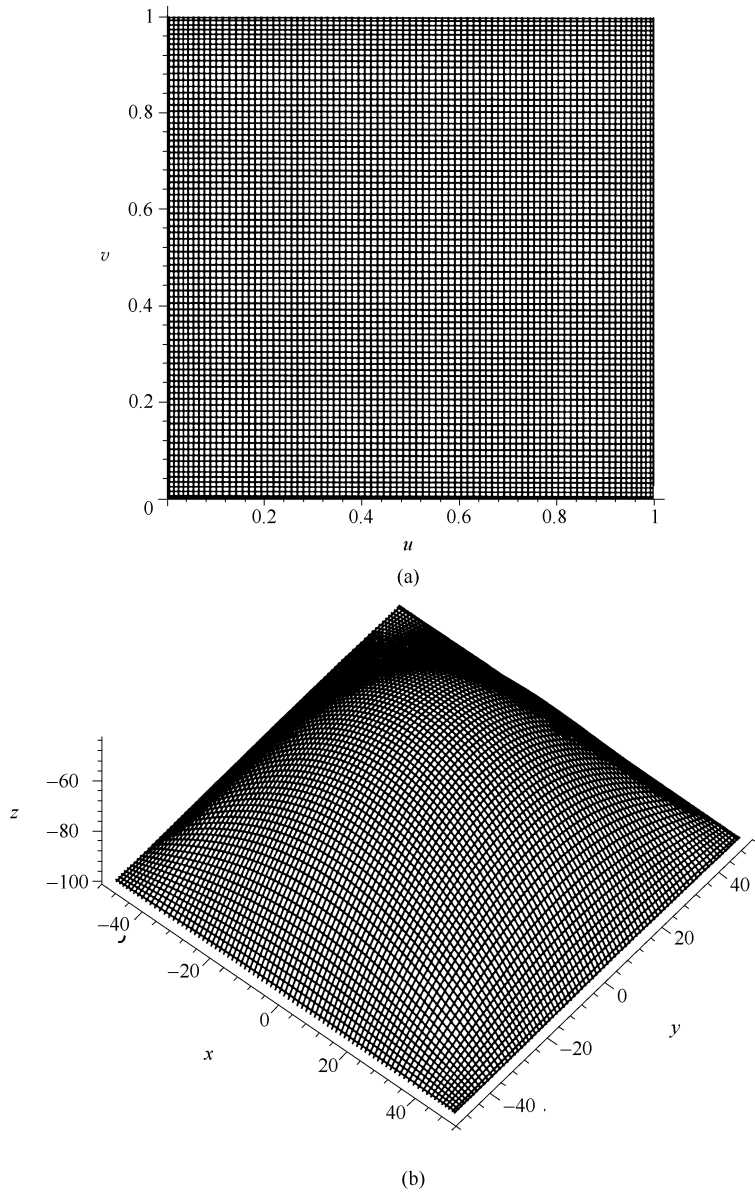
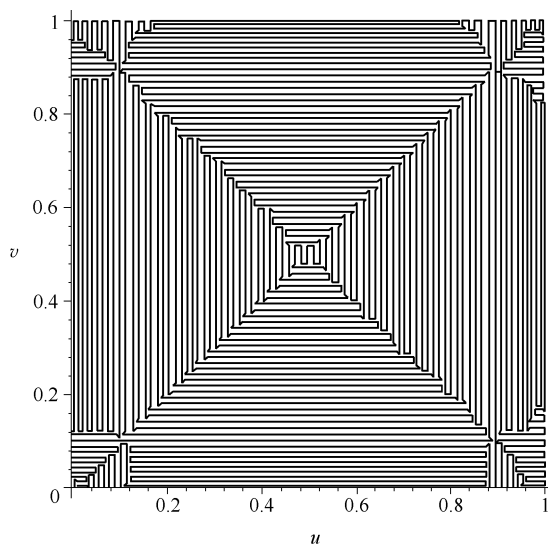


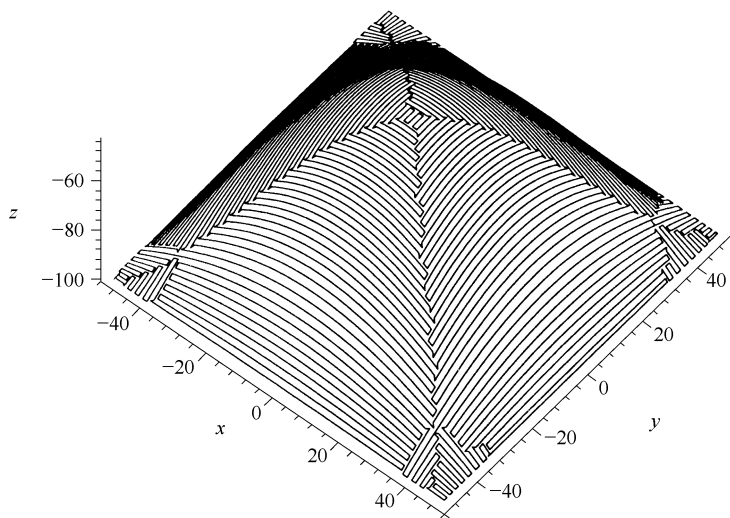
图 4.14 对于例 4.2 中的表面在 (u, v) 区域和在工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠

(a) 例 4.2 中的表面在 (u, v) 区域中两个等参数刀具路径的重叠

(b) 例 4.2 中的表面在工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠



(a)



(b)

图 4.15 对于例 4.2 中的表面在 (u, v) 区域和工件坐标系内的 SFC 刀具路径

(a) 例 4.2 中的表面在 (u, v) 区域内的 SFC 刀具路径

(b) 例 4.2 中的表面在工件坐标系内的 SFC 刀具路径

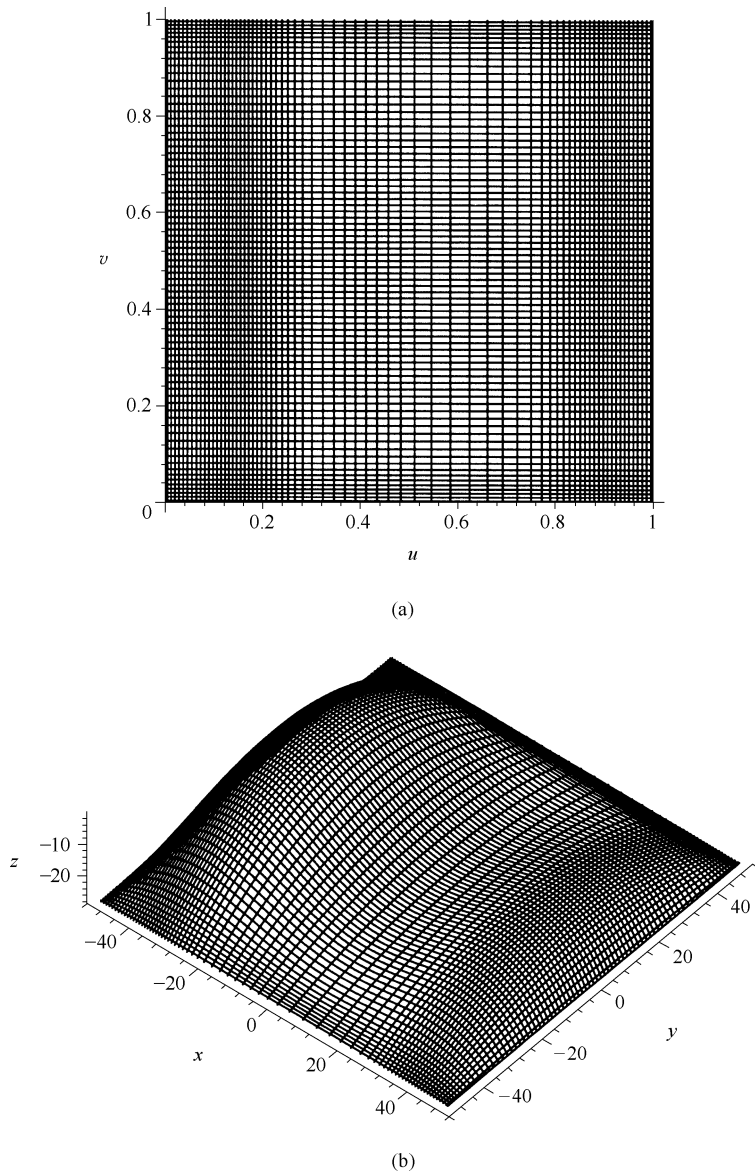
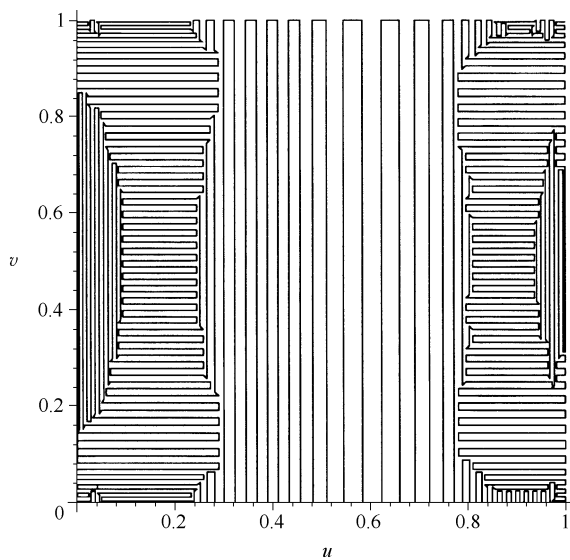
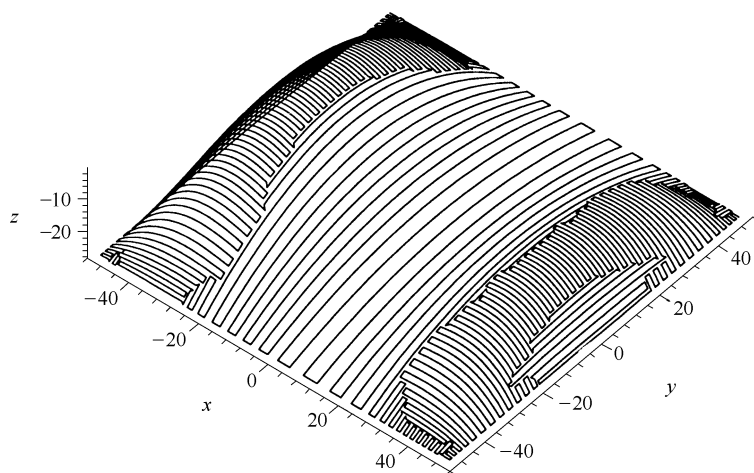


图 4.16 对于例 4.3 中的表面在 (u, v) 区域和工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠

- (a) 例 4.3 中的表面在 (u, v) 区域中两个等参数刀具路径的重叠
- (b) 例 4.3 中的表面在工件坐标系中两个等参数刀具路径的重叠



(a)



(b)

图 4.17 对于例 4.3 中的表面在 (u, v) 区域和工件坐标系中的 SFC 刀具路径

(a) 例 4.3 中的表面在 (u, v) 区域的 SFC 刀具路径

(b) 例 4.3 中的表面在工件坐标系中的 SFC 刀具路径

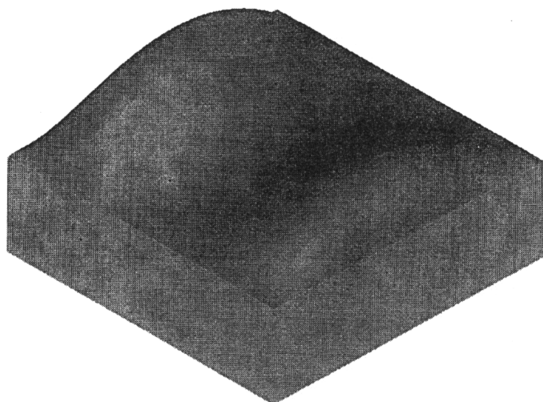


图 4.18 在 Unigraphics18 中五轴加工应用 SFC 刀具路径的仿真结果

其中, $t_0 = \frac{\Delta L}{F}$, $\Delta L = \sqrt{(\Delta x_m)^2 + (\Delta y_m)^2 + (\Delta z_m)^2}$, t_x

$$= \frac{\Delta x_m}{v_{x,\max}}, \quad t_y = \frac{\Delta y_m}{v_{y,\max}},$$

$t_z = \frac{\Delta z_m}{v_{z,\max}}$, $t_a = \frac{\Delta a}{v_{a,\max}}$, $t_b = \frac{\Delta b}{v_{b,\max}}$, 且 $v_{\max}$ 为相应轴上的最大速度。若

MAHO 600E, 最大三维角速度给定 $v_{x,\max} = v_{y,\max} = v_{z,\max} = 4000 \text{ mm/min}$,

$v_{a,\max} = 235^\circ/\text{s}$, $v_{b,\max} = 162^\circ/\text{s}$ 。

表 4.1 中每一条刀具轨迹所需时间的估计值在表 4.2 中给出。注意到与带有少数拐点的较长轨迹相比, 有多个拐点的较短刀具轨迹所需时间较长。例如加工一个像例 4.1 中的简单表面, 不需要很多带有锐角变化的拐点。因此, 相应的 SFC 刀具轨迹无论是从刀具轨迹长度方面还是加工时间方面都比常规的等参数刀具轨迹要好。但是对于像例 4.3 复杂形状的表面, 当角速度未被约束时, 尖角拐点会减缓加工进程。对于这样的表面, SFC 方法更适用于有高速旋转轴的铣床上。

表 4.2 SFC 刀具路径与等参数刀具路径的估计加工时间

刀 具 路 径	估计加工时间/s		
	例 4. 1	例 4. 2	例 4. 3
在 v 方向上的等参数	4541	12342	10622
在 u 方向上的等参数	4013	12342	16744
SFC 刀具路径	3790	11750	16414

参 考 文 献

- [1] Asano, T., Ranjan, D., Roos, T., Welzl, E., and Widmayer, P. 1997. Space-filling curves and their use in the design of geometric data structures. *Theoretical Computer Science*, 181(1):3–15.
- [2] Bohez, E. L. J. 2002. Five-axis milling machine tool kinematic chain design and analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(4):505–520.
- [3] Bohez, E. L. J., Makhanov, S. S., and Sonthiermpoon, K. 2000. Adaptive nonlinear tool path optimization for 5-axis machining. *International Journal of Production Research*, 38(17):4329–4343.
- [4] Chiou, C.-J. and Lee, Y.-S. 2002. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining. *Computer-Aided Design*, 34(5):357–371.
- [5] Cole, A. J. 1987. Compaction techniques for raster scan graphics using space-filling curves. *The Computer Journal*, 30(1):87–92.
- [6] Cox, J. J., Takezaki, Y., Ferguson, H. R. P., Kohkonen, K. E., and Mulkay, E. L. 1994. Space-filling curves in tool-path applications. *Computer-Aided Design*, 26(3):215–224.
- [7] Dafner, R., Cohen-Or, D., and Matias, Y. 2000. Context-based space filling curves. *Computer Graphics Forum*, 19(3):209–218.
- [8] Griffiths, J. G. 1994. Toolpath based on Hilbert’s curve. *Computer-Aided Design*, 26(11):839–844.
- [9] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D. 1979. *Introduction To Automata Theory, Languages, And Computation*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA.
- [10] Kim, K. and Jeong, J. 1996. Finding tool approach directions for sculptured surface manufacture. *IIE Transactions on Design and Manufacturing*, 28(10):829–836.
- [11] Koren, Y. and Lin, R.-S. 1995. Five-axis surface interpolators. *Annals of CIRP*, 44(1):379–382.
- [12] Lam, W. M., Shapiro, J. M., and Sarnoff, D. 1994. A class of fast

- algorithms for the Peano-Hilbert space-filling curve. In *ICIP (1)*, pages 638–641.
- [13] Lauwers, B., Dejonghe, P., and Kruth, J. P. 2003. Optimal and collision free tool posture in five-axis machining through the tight integration of tool path generation and machine simulation. *Computer-Aided Design*, 35(5):421–432.
- [14] Lawder, J. K. and King, P. J. H. 2001. Querying multi-dimensional data indexed using the hilbert space-filling curve. *ACM SIGMOD Record*, 30(1):19–24.
- [15] Lee, Y.-S. and Ji, H. 1997. Surface interrogation and machining strip evaluation for 5-axis CNC die and mold machining. *International Journal of Production Research*, 35(1):225–252.
- [16] Lin, R.-S. and Koren, Y. 1994. Real time interpolator for machining ruled surfaces. In *ASME Annual Meeting Proceedings*, pages 951–960.
- [17] Makhanov, S. S., Batanov, D., Bohez, E., Sonthipaumpoon, K., Anotaipaiboon, W., and Tabucanon, M. 2002. On the tool-path optimization of a milling robot. *Computers & Industrial Engineering*, 43(3):455–472.
- [18] Makhanov, S. S. and Ivanenko, S. A. 2003. Grid generation as applied to optimize cutting operations of the five-axis milling machine. *Applied Numerical Mathematics*, 46(3-4):331–351.
- [19] Munlin, M.-A., Makhanov, S. S., and Bohez, E. L. J. 2004. Optimization of rotations of a five-axis milling machine near stationary points. *Computer-Aided Design*, 36(12):1117–1128.
- [20] Pascucci, V. and Frank, R. J. 2001. Global static indexing for real-time exploration of very large regular grids. In *Supercomputing '01: Proceedings of the 2001 ACM/IEEE conference on Supercomputing (CDROM)*, pages 2–2.
- [21] Rao, A. and Sarma, R. 2000. On local gouging in five-axis sculptured surface machining using flat-end tools. *Computer-Aided Design*, 32(7):409–420.
- [22] Roberts, F. S. 1984. *Applied combinatorics*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- [23] Sagan, H. 1994. *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag, New York.
- [24] Schamberger, S. and Wierum, J.-M. 2005. Partitioning finite element meshes using space-filling curves. *Future Generation Computer Systems*, 21(5):759–766.
- [25] Song, Z. and Roussopoulos, N. 2000. Using Hilbert curve in image storing and retrieving. In *MULTIMEDIA '00: Proceedings of the 2000 ACM workshops on Multimedia*, pages 167–170.
- [26] Velho, L. and Gomes, J. 1991. Digital halftoning with space filling curves. In *SIGGRAPH '91: Proceedings of the 18th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 81–90.
- [27] Yang, K.-M., Wu, L., and Mills, M. 1988. Fractal based image coding scheme using Peano scanning. In *Proceedings of 1988 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 2301–2304.

- [28] Zhang, Y. and Webber, R. E. 1993. Space diffusion: an improved parallel halftoning technique using space-filling curves. In *SIGGRAPH '93: Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 305–312.

第 5 章 自适应曲线坐标系中的刀具路径

5.1 概述

第 4 章中讲到的空间填充曲线刀具路径的生成方法已经被用于参数坐标在矩形区域内改变的曲面。一旦最小加工带被估算好了，那么在矩形区域内为 SFC 而构造基本网格是很容易的（见 4.3.1 节）。然而，这种网格通常效率较低，因为只在某些区域要求轨迹间要有一小段距离。对于裁剪曲面的复杂边界来说，矩形网格效率也较低。这些曲面是用其他曲面交叉而形成的边界描述的。对于型腔铣削来说，当参数区域包括一个或几个型腔周围的内部边界时，复杂边界也经常出现。从计算数学的角度来讲，当一个数值的自适应曲线网格要被引入时，上面的都是典型的常见情况。在 SFC 刀具路径生成方法的第一步，网格很容易转变为之字形刀具路径或取代所要求的基本网格。

在这一章中我们介绍并分析两种情况。第一种方法是一种对基于欧拉-拉格朗日方程的典型网格生成方法的修正。欧拉-拉格朗日方程用于描述网格的期望特性，如平滑性、对边界的适应性和对特定权函数的自适应性^[15,81]。因此，第 5.3 节提出一系列相关的网格生成方法和刀具路径优化方法。在这个框架中，在文献 [49, 51] 中提出的权函数用运动学误差描述。最小值服从位于连续刀具轨迹间皱褶高度的相关约束。

然而，上面的方法有很多不足，尤其是对于复杂约束来讲，可能会收敛得缓慢。除此之外，该方法要求每条刀具轨迹上有相同的刀具接触点数。因此，如果运动学误差从一条轨迹到另一条轨迹变化明显，那么该方法就需要过多数量的点。

第5.4节介绍了另一种网格细化的改进方法,更适合刀具路径优化的框架。该方法不要求每条轨迹上都有相等数量的点。它自动计算所需网格线的数量。相对于第一种方法中权函数描述运动学误差或运动学误差的估算值(如表面曲率或旋转角度),该算法重复构建了一个适应控制函数,用来表示皱褶高度约束。这一重要修改导致使沿着刀具路径具有任意数量的点成为可能。因此,通过插入沿曲线坐标[⊖]产生的额外点而减小了运动学误差。换句话说,这种方法用权函数代替了皱褶约束,然后独立地处理运动学误差。另外,取代 Winslow 函数,该优化基于调和函数,其来源于调和映射理论^[25,36]。这个函数不但能提供光滑性和适应性,而且在一定条件下还能保证数值收敛。最后,这个方法融合了 SFC 技术。在这种情况下,网格不直接转变为刀具轨迹。相反,它代替了矩形网格成为所需的基本网格生成 SFC(见第4章)。有了这个改进,SFC 刀具路径可以构造带有复杂不规则边界、隔断、型腔、岛状物等的加工表面。除此之外,适应性网格可以有效处理复杂空间约束变化,用这种方法在一个网格中生成的 SFC 只有在必要时才会有一个小的单元。

5.2 网格生成的历史

网格生成已成为计算流体动力学、热量和质量传递以及结构分析的一个分支学科。如今,网格生成在很多领域广泛应用,包括 CAD/CAM、机械工程和制造等。

结构化网格生成可以追溯到20世纪60年代后期美国的 Winslow 和

⊖ 曲线坐标是标准坐标系进行某种变换得到的一种坐标系。例如,二维情况下,对于笛卡尔坐标 x 和 y , 可以用 p 和 g 代替, $p = p(x, y)$, $g = g(x, y)$ 。 (x, y) 平面内的 p 、 g 高度线和 (p, g) 平面内的 x 、 y 高度线通常是曲线。这要求在每点处局部可以相互转换,即一个点可以在曲线坐标和笛卡尔坐标之间相互转换。根据应用场合的不同,曲线坐标系可能比笛卡尔坐标系更简单。这也使得矢量微积分的概念不但可以用笛卡尔坐标表示,也可以用曲线坐标表示。

Lawerence Livermore 国家实验室^[81]。大约在相同时期,结构化网格生成,在前苏联由莫斯科应用数学学院和前苏联科学院西伯利亚分部计算中心的 Godunov 和 Prokopov 提出^[32]。另外,预示着现代网格生成的一些想法由 Tikhonov 和 Gorbunov^[75]、Sidorov^[67]以及 Bahvalov 提出。

基于某特定权函数估计的网格生成统一思想融合了平均分布的原则,要求这样的节点分布形成的网格间距和权函数在整个区域保持连续。许多开创性论文介绍了这一思想^[17,22,35,58,62,72]。

权函数的多样性适于解决 CFD 中的问题已经被提出来了^[2,3,5,13-15,21,23,24,27,28,52,53,55,74,79,80]。

关于这个问题的一般观点以一个信息化计算空间的概念提出^[2,40,54,72]。网格具有椭圆性,所以被称为内部通信的观察者。一个观察者移动到一个恰当的位置,意味着他的邻居也要跟随他移动。术语“椭圆”源于这样的事实,内部通信是可以借助椭圆偏微分方程如拉普拉斯方程等模拟。很多采用信息计算空间各种解释的半启发式方法被 Baker^[7], Berger 和 Oliger^[8], Blacker 和 R. J.^[10], Blacker 和 Stephenson^[11], Dannenhoffer^[20], Frey 和 Field^[30], Jiang 和 Carey^[43], Kennon 和 Anderson^[44], Kennon 和 Dulikravich^[45], Pardhanani 和 Carey^[56], Rank 和 Babushka^[60], Samareh-Abolhassani 和 Stewart^[65], Soni^[68], Vabistchevitch^[78]提出来。

此外,术语“结构化”意味着曲线网格拓扑等价于一个矩形网格。换句话说,应用矩形网格的某种变形可以获得曲线网格。这个代表了所谓“物理区域”内一一映射离散版本的想法最终演化为一个网格构造的思路,在这个区域内曲线网格被定义,在参数化平面(或三维空间立方体)上定义所谓的“计算区域”,网格图像在该区域内变为长方形^[32,33,73]。

这种网格的构造可以通过变分的方法来实现,变分方法利用欧拉方程优化网格质量指标的加权平均值。网格质量指标包括很多标准,如网格光滑度、网格正交性、与平均分布原则一致的权函数的适应性、网格线的总长度、每一格的长宽比等。

当映射变得不能接受的时候,就需付出相当大的努力去消除自相

交和扭转单元, 以及位于规定区域外的点。这种网格被称为退化网格。一种用于构造非退化网格的有效途径是建立在正交网格基础上, 这种途径在文献 [4, 14, 15, 59, 66, 70] 里提前并被分析。正交网格发生器涉及的一个正交性衡量标准是网格线^[13,15,63]正切矢量间的点积。

另外一种构造非退化网格的方法是基于多块网格策略, 利用在块^[32,73,76]里分解形状复杂的区域。然而, 在块之间边界上的不连续性也就成为这种方法最主要的缺点^[18,69]。

Ivanenko 提出了凸网格的概念。由四边形构成的凸网格既保证了非退化网格的连续性, 又保证了它的离散水平^[36,61]。而且, 非退化网格的概念也能在调和映射的结构里描绘^[26]。调和映射的应用作为一种恰当的网格生成策略由 Dvinsky^[25] 和 Ivanenko^[36] 提出。建立在权函数曲线图表面上的映射依照等分布原则提供了网格的适应性要求。该理论与其他网格生成策略相比, 优点是在二维空间内它在某些条件下既能保证映射的存在性, 也能保证映射的唯一性。此外, 调和网格生成方法已经被证明是与参数化无关的, 即物理空间内所生成的网格是独立的, 与物理区域参数化的选择无关。

就刀具轨迹生成而言, 在网格生成技术框架中工业铣床的刀具路径构造第一次被介绍是在文献 [49] 中, 其发展在文献 [50] 中介绍。网格生成技术非常适合刀具路径的优化。实际上, 网格精确性约束的概念几乎总是刀具路径设计的主要组成部分。例如大加工误差区域内的网格适应性, 方便地构造出常规之字形和螺旋形的曲线版本的可能性, 以及相关刀具直径约束和皱褶高度的适应性。而且, 与标准技术局部误差估计相比, 网格生成涉及全局空间误差, 从而适合所有的 CL 点同时进行。

这种思想在文献 [51] 里被进一步发展了, 特别是在五轴加工和调和映射的框架中。Bieterman 和 Sandstrom 分别在拉普拉斯网格的基础上提出了相似的方法。

应该指出的是: 应用网格生成进行刀具路径优化还没有被充分开

发。例如,当应用到复杂区域^[12,31,34,57]时,非结构化网格通常更加灵活和稳定。然而,应用这样的网格生成刀具路径是一个开放性问题。

注意:我们参考的文献都是介绍基础网格生成和调和映射的选择性的先驱论文。就整个范围的现代网格生成方法而言,感兴趣的读者应该参考优秀文献 Carey^[16], Farrashkhalvat 和 Miles^[29], Liseikin^[46,47], Steinberg^[71], Thompson 等^[73], Tucker^[77]。

最后,尽管网格生成在很多领域内是成功的,但生成过程依然没能实现足够简单和自动化。网格生成可能会成为最耗时间的部分,需要几个小时甚至几天的计算。

5.3 为刀具轨迹优化生成变分网格

5.3.1 初步的例子

初步的例子是一个沿着凹形曲线有剧烈变化的表面,如图 5.1 所示。相应的曲线网格如图 5.2 所示。刀具会沿着一组坐标曲线移动。显然,这样的曲线更适合切削,且要求相同的数据结构,像矩形网格中应用的那些数据结构一样。

此外,网格生成技术应用于生成刀具路径复杂边界的情况,例如图 5.3 所示的复杂形状区域。Jeong 和 Kim^[41]以通过普通之字形还没有解决的复杂的型腔铣削为例研究这个领域。然而,生成的网格显示此技术使我们能同时生成适当的曲线之字形和螺旋形。网格可以很好地适应内部和外部边界。此外,网格生成技术的柔性可以使其适用于要求更精确的加工区域。

5.3.2 变分方法和函数

在这一节中,我们提出变分网格生成方法的基本原则,而且这些技术可以被用于刀具路径优化。就网格生成技术而言,我们遵循 Winslow^[81]、Brackbill 和 Saltzman^[15]的典型变分方法。刀具路径优化遵循适应性网格^[49,51]。

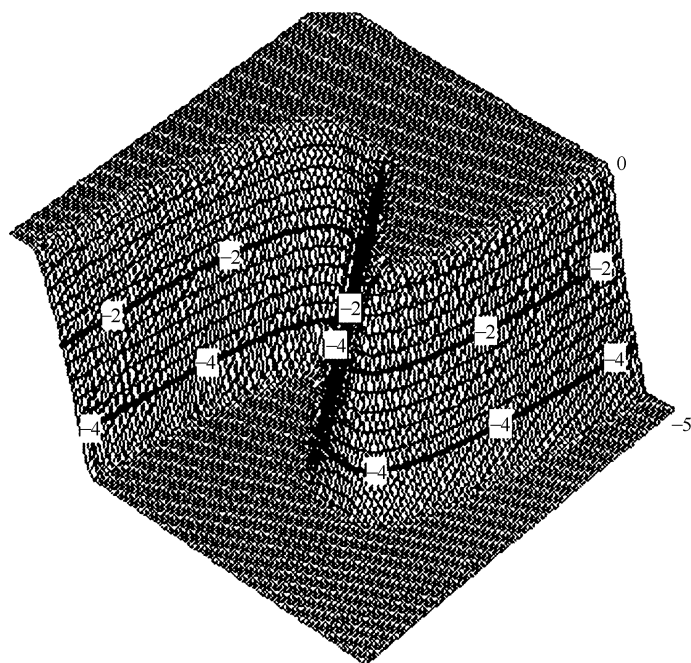


图 5.1 沿着凹形曲线有剧烈变化的表面

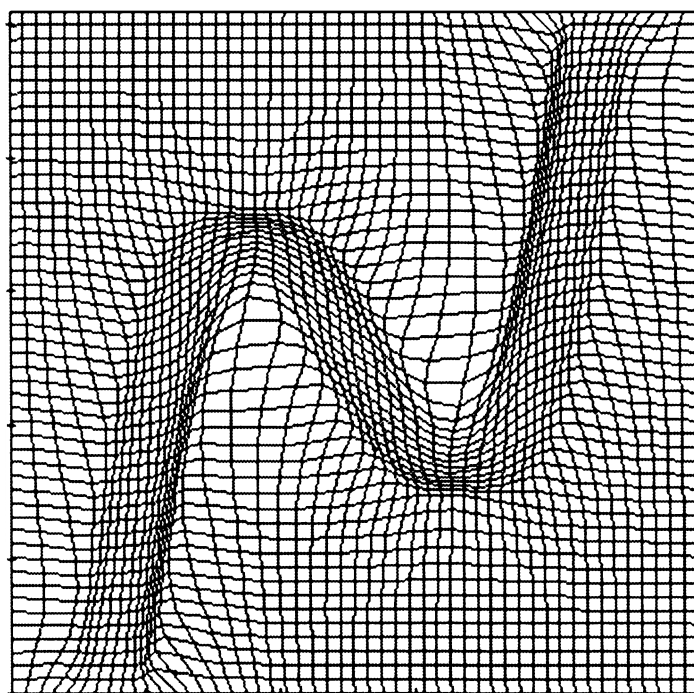


图 5.2 用来加工图 5.1 中表面的曲线网格

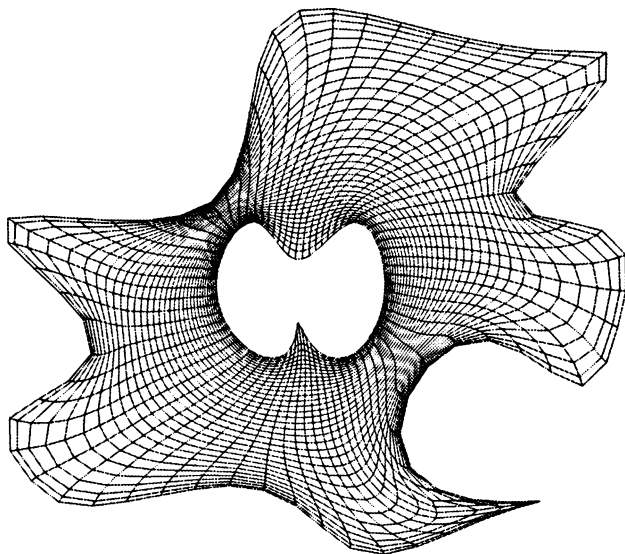


图 5.3 对于复杂形状区域可以转化为刀具路径的网格

$S = S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示一个加工面, u 和 v 都是参数变量。考虑一组刀具位置点 $\{u_{i,j}, v_{i,j}\}$, $0 \leq i \leq N_\xi$, $0 \leq j \leq N_\eta$ 排列如一个曲线网格。从数学角度来讲, 这意味着 $\{u_{i,j}, v_{i,j}\}$ 是一个离散类比映射, 该映射从计算区域 $\Delta = \{0 \leq \xi \leq N_\xi, 0 \leq \eta \leq N_\eta\}$ 到定义在参数坐标 (u, v) 的参数区域。换句话说, 就是存在一对函数 $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, 这样一个矩形网格 $\{i, j\}$ 经过 $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ 而成为 $\{u_{i,j}, v_{i,j}\}$ (见图 5.4)。

一般刀具路径优化问题已经由 $\min_{S, \Pi, \Sigma, m} C$ 给出。这里, C 代表一个指标向量。这个向量应该包括运动学误差、路径长度、加工带的缺陷、加工时间等。而且, Π 是刀具路径, m 是一系列与机床安装和配置相关的参数, Σ 是刀具参数。通常, 受约束的优化包括皱褶高度、避免划伤约束等。

注意优化指标和约束可以根据加工问题进行互换。例如最低的估计可以通过运动学错误服从褶皱高度约束来实现, 或者皱褶可以被最小化到服从规定的最大误差。一个皱褶和与刀尖误差的加权和可以被

认为是一个指标。

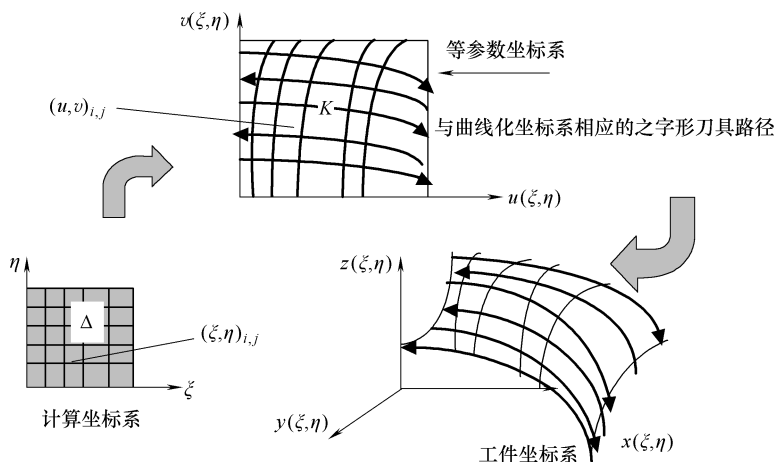


图 5.4 作为从计算区域到参数（物理）区域映射的刀具路径

在这一节，我们考虑到指标向量 C 由一个单独元素给定， $C = \|\varepsilon\|$ 。其中， $\varepsilon = |S(\xi, \eta) - T(\xi, \eta)|$ 且 $T(\xi, \eta)$ 是加工面。 T 的一个近似值可以通过多种技术获得，包括实体模型、扫描体积方法等（见绪论）。

作为一个例子，简单地近似考虑 $T(\xi, \eta)$ 由子表面（片） $T_{i+1/2, j+1/2}(\xi, \eta)$ 组成，跨越到一个网格单元 $\{(u, v)_{i,j}, (u, v)_{i+1,j}, (u, v)_{i,j+1}, (u, v)_{i+1,j+1}\}$ 。其中， $T_{i+1/2, j+1/2}(\xi, \eta)$ 是通过在两个刀具轨迹之间线性插值得到的（见图 5.5）。

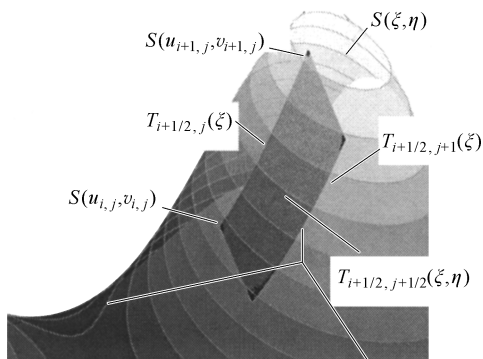
由于刀具路径 Π 现在是被网格点 $\{u_{i,j}, v_{i,j}\}$ 代表，因此有下面的优化：

$$\min_{u_{i,j}, v_{i,j}} \|\varepsilon\| \quad (5.1)$$

另外，让我们介绍基于变分原理的网格生成技术。按照参考文献 [15, 81]，所要求的网格是一种由

$$\min(F_s + \lambda_v F_v + \lambda_o F_o) \quad (5.2)$$

给出的最小化问题的离散解决方案。其中

图 5.5 由面片构造的 $T(\xi, \eta)$ 表面

$$F_s = \iint_{\Delta} [(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2] dudv \quad (5.3)$$

$$F_v = \iint_{\Delta} J\varepsilon dudv \quad (5.4)$$

$$F_o = \iint_{\Delta} \Delta\xi\Delta\eta dudv \quad (5.5)$$

其中, $\Delta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right)$; J 代表映射雅可比系数, 由 $J = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}$ 给定; λ_v, λ_o 是校准参数。

F_s 是温斯洛函数, 用来衡量映射的平滑性。使函数最小化的映射产生了一种网格, 这种网格没有间断和棱角, 而且适合物理区域的边界。

F_o 就是所谓的正交函数。当网格的所有共轭线都正交时, F_o 最小值等于 0。这个函数可以作为一种额外的方法被利用, 这种方法可以提高网格质量, 消除扭曲和退化单元。但是在刀具路径生成的文章中, F_o 并不代表一种重要的加工标准。

最后, F_v 是关于权函数 ε 的等分方法。网格单元面积 (仅有离散的雅可比 J) 和权函数 ε 的积应该在整個网格上不变。

这就是如何最小化误差来满足网格生成。由于误差区域趋零时网格单元区域趋于零, 网格发生器以减少甚至误差最小化的这样方式来

调整网格,同时还维持基本的网格结构。然而, F_v 不能被单独最小化,因为解并非独一无二甚至可能是不存在的。例如 $J = \infty$ 最小化 F_v , 然而这种映射是单一的,因此不能产生曲线网格。让我们忽略正交函数,考虑 $F = F_s + \lambda_v F_v$ (对正交函数进一步的分析可以在文献 [15, 42] 里找到)。

在 F_s 和 F_v 内改变变量:

$$F_s = \iint_{\Delta} J^{-1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \quad (5.6)$$

$$F_v = \iint_{\Delta} J^2 \varepsilon d\xi d\eta \quad (5.7)$$

可以有很多方式能够进行,其中之一是利用欧拉方程使函数的加权和 $F_s + \lambda F_v$ 最小化。给出欧拉方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial x_{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial x_{\eta}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial y_{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial y_{\eta}} = 0$$

然后偏导数应该被有限差分取代,而且有限差分方程系统应该进行数值求解。

另外,函数 F_s 和 F_v 可以通过 I_s 和 I_v 来近似得到。离散函数 $I = I_s + \lambda_v I_v$ 的结果可以用条件 $\frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} = 0, \frac{\partial I}{\partial v_{i,j}} = 0$ 最小化。

当标准二阶近似值被用于第一种方法 ($\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \approx u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}$,

$\frac{\partial u}{\partial \eta} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2}$ 等) 和标准梯形规则 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 在第二种方法中被用于离散 F_s 和 F_v 时,这两种方法就产生相同的有限差分方程。

不难证明,有限差分方程系统是由式 (5.8) 给出的:

$$\tilde{R}_u = a_1 u_{\xi\xi} + a_2 u_{\xi\eta} + a_3 u_{\eta\eta} + c_1 v_{\xi\xi} + c_2 v_{\xi\eta} + c_3 v_{\eta\eta} + J^2 \varepsilon_v \quad (5.8)$$

$$\tilde{R}_v = b_1 u_{\xi\xi} + b_2 u_{\xi\eta} + b_3 u_{\eta\eta} + a_1 v_{\xi\xi} + a_2 v_{\xi\eta} + a_3 v_{\eta\eta} + J^2 \varepsilon_u$$

其中, 下标 ξ 、 η 、 u 和 v 分别相当于在 (ξ_i, η_j) 和 $(u_{i,j}, v_{i,j})$ 处的有限差分值。

二阶导数的系数由下面公式给出

$$\begin{aligned} a_k &= a_{s,k} + \lambda_v a_{v,k}, \quad b_k = b_{s,k} + \lambda_v b_{v,k}, \quad c_k = c_{s,k} + \lambda_v c_{v,k}, \quad k=1,2,3, \\ a_{s,1} &= -A\alpha, \quad b_{s,1} = B\alpha, \quad c_{s,1} = C\alpha, \\ a_{s,2} &= 2A\beta, \quad b_{s,2} = -2B\beta, \quad c_{s,2} = -2C\beta, \\ a_{s,3} &= -A\gamma, \quad b_{s,3} = B\gamma, \quad c_{s,3} = C\gamma, \\ A &= u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta, \quad B = v_\xi^2 + v_\eta^2, \quad C = u_\xi^2 + u_\eta^2, \\ a_{v,1} &= -u_\eta v_\eta, \quad b_{v,1} = v_\xi^2, \quad c_{v,1} = u_\eta^2, \\ a_{v,2} &= u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi, \quad b_{v,2} = -2v_\xi v_\eta, \quad c_{v,2} = -2u_\xi u_\eta, \\ a_{v,3} &= -u_\xi v_\eta, \quad b_{v,3} = v_\xi^2, \quad c_{v,3} = u_\xi^2 \end{aligned}$$

现在让我们估计一下在两个刀具连续轨迹 η_j 和 η_{j+1} 间中点处的加工带。假设有一平头刀, 为了简便, 假设这个刀具与表面的法向重合。假设一个垂直面通过点 $S(\xi_i, \eta_j)$ 和 $S(\xi_i, \eta_{j+1})$, 在这个平面上, 我们通过一个半径为 R 的圆取这个表面相应部分的近似值, 其中, R 为该方向上的曲率半径。一个简单的几何推理 (见图 5.6) 产生:

$$w = 2|R| \sqrt{\frac{2|R|h + h^2}{|R| + h}} \quad (5.9)$$

另外, 刀具半径 r 必须满足 $r \geq 2 \sqrt{2|R|h + h^2}$ 。注意: 如果刀具必须倾斜, 式 (5.9) 必须被式 (3.36) (见 3.3 节) 给出的一个包括刀具有效切削半径 r_e 的公式所代替。例如因为 $h \ll r_e$, $h \ll R$, Lo^[48] 提出了一个和式 (3.34) 相似的公式:

$$w = \sqrt{\frac{8hr_e R}{R - r_e}}$$

为了构造一个刀具路径能够同时适合切削误差 ε 和与指定皱褶高度相关的约束, 我们引入了下面的条件:

$$D_{i,j+1/2} \geq 0 \quad (5.10)$$

其中, $D_{i,j+1/2} = w_{i,j+1/2}^2 - d_{i,j+1/2}^2$; d 表示平面 $S(u, v)$ 内调整过的曲线 η_j

和 η_{j+1} 上两点间的距离。平面 $S(u, v)$ 由公式 (5.11) 给出:

$$d_{i,j+1/2} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2 + (z_{i,j+1} - z_{i,j})^2} \quad (5.11)$$

而且 w 是由式 (5.9) 估算出来的。

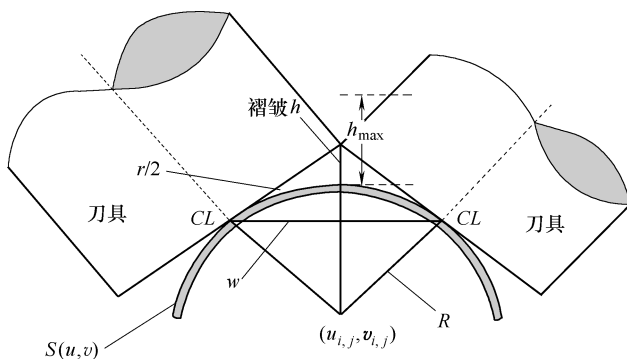


图 5.6 凸表面的皱褶高度估算值

然后, 我们遇到了下面的问题: 解方程 (5.8), 按照约束公式 (5.10) 求得函数 I 的最小值。为了解决最小值约束, 我们引入罚函数 $p(D)$ 。它是一个凸递减函数, 当 $D \rightarrow -\infty$ 时, 若 $D \geq 0$ 且 $p(D) \rightarrow \infty$, 则 $p(D) = 0$ 。

下一步, 我们定义一个离散罚函数:

$$I_p = \lambda_p \sum_{i,j} \lambda_{i,j} p(D_{i,j+1/2})$$

其中, $\{\lambda_{i,j}\}$ 是惩罚系数, λ_p 是权系数。 $p(D)$, $D \in (-\infty, 0)$ 是一个凸递减函数, 若 $D \rightarrow -\infty$, 则 $p(D) \rightarrow \infty$ 。

下一步, $\lambda_p I_p$ 关于 $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ 的导数被加到上述有限差分方程的左边:

$$R_u = \tilde{R}_u + \lambda_p \frac{\partial I_p}{\partial u_{i,j}} = 0, R_v = \tilde{R}_v + \lambda_p \frac{\partial I_p}{\partial v_{i,j}} = 0$$

例 5.1 令 $S(u, v) \equiv (x, y, z) = (u, v, u^2 + v^2)$, 考虑一个罚函数由 $p(D) = [\min(0, D)]^2$ 给出。因为 $D < 0$, 我们就有:

$$p(D_{i,j+1/2}) = D_{i,j+1/2}^2 = [w^2 - ((u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j+1} - v_{i,j})^2) +$$

$$(u_{i,j+1}^2 + v_{i,j+1}^2 - u_{i,j}^2 - v_{i,j}^2)^2 \Big]^2$$

对 $u_{i,j}$ 的微分, 产生一个惩罚项由下式给出:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_p}{\partial u_{i,j}} = & 2D_{i,j+1/2} \left[2(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \right. \\ & 4(u_{i,j+1}^2 + v_{i,j+1}^2 - u_{i,j}^2 - v_{i,j}^2)u_{i,j} \Big] \lambda_{i,j+1/2} - \\ & 2D_{i,j-1/2} \left[2(u_{i,j} - u_{i,j-1}) + \right. \\ & 4(u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2 - u_{i,j-1}^2 - v_{i,j-1}^2)u_{i,j} \Big] \lambda_{i,j-1/2} \end{aligned}$$

注意: $p(D)$ 在 $D=0$ 处是不可微的。因此, 在 $D=0$ 附近必须进行适当的调整。例如:

$$Preg(D) = \begin{cases} p(D) & D \geq \varepsilon \\ H(D) & 0 < D < \varepsilon \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

其中, $H(D)$ 是一个 Hermite 多项式, 满足 $H(\varepsilon) = p(\varepsilon)$, $\frac{dH(\varepsilon)}{dD} =$

$$\frac{dp(\varepsilon)}{dD}, H(0) = 0。$$

相应的系统就能通过准牛顿迭代法得到解决, 由下式给出;

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n - \left(\tau \left(R_u \frac{\partial R_v}{\partial v} - R_v \frac{\partial R_u}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial R_u}{\partial u} \frac{\partial R_v}{\partial v} - \frac{\partial R_v}{\partial u} \frac{\partial R_u}{\partial v} \right)^{-1} \right)_{i,j} \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^n - \left(\tau \left(R_v \frac{\partial R_u}{\partial u} - R_u \frac{\partial R_v}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial R_u}{\partial u} \frac{\partial R_v}{\partial v} - \frac{\partial R_v}{\partial u} \frac{\partial R_u}{\partial v} \right)^{-1} \right)_{i,j} \end{aligned}$$

其中, n 是迭代指数, τ 是迭代参数。惩罚系数通过以下迭代公式得到更新:

$$\lambda_{i,j+1/2}^{l+1} = \begin{cases} \lambda_{i,j}^l + \delta \lambda_{i,j}^l & D_{i,j+1/2} < 0 \\ \lambda_{i,j}^l & \text{其余} \end{cases}$$

其中, l 是惩罚迭代索引, $\delta \lambda_{i,j}^l$ 代表相应的增量。为了加强算法的稳定性, 我们采用下面的线性化松弛定理:

$$(u_{i,j}^{n+1})_{new} = u_{i,j}^{n+1} (1 - \theta) + u_{i,j}^n \theta$$

$$(v_{i,j}^{n+1})_{new} = u_{i,j}^{n+1} (1 - \theta) + u_{i,j}^n \theta$$

其中, $0 \leq \theta \leq 1$ 。

5.3.3 调和函数

式 (5.2) 中的两个函数 F_s 与 F_v 的和可以被一个单独的函数代替, 这个函数由式 (5.12) 给出:

$$I = \int \frac{(u_\xi^2 + u_\eta^2)(1 + f_u^2) + (v_\xi^2 + v_\eta^2)(1 + f_v^2) + 2f_u f_v (u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta)}{(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi) \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} d\xi d\eta \quad (5.12)$$

式 (5.12) 被称为调和函数, 而且是 Winslow 函数针对由 $f(u, v)$ 描述的误差表面的一个推广。下标 u, v, ξ, η 表示偏导数且 f 是权函数。

调和函数来源于调和映射^[25,36]理论。已经证明了函数最小化映射的能量 (详见文献 [42]), 而且产生的网格适合 f 的较大梯度区域。注意: 如果 $f_u \equiv f_v \equiv 0$, 则调和函数式 (5.12) 就变成 Winslow 函数式 (5.3)。弄明白 I 使网格适合 f 的梯度而不是 f 本身这一点很重要。因此, 与 F_v 相比, 它的作用不同。此外, 最小化式 (5.12) 比最小化式 (5.2) 在计算上复杂 10 倍还多^[19]。然而, 式 (5.12) 有一些优点, 尤其是它能建立一个计算程序, 该程序 (在某些条件下) 总能收敛到一个非退化网格^[42]。式 (5.12) 的最小化约束服从皱褶高度条件, 可以通过前面章节提到的惩罚技术提出。调和函数所要求的修正值和近似解在 5.4 节中给出。

5.3.4 刀具路径优化的例子

这一节通过教学实例阐述所提出的过程的性能。

(1) 例 5.2 适应曲线区域

这个例子阐述了图 5.7 中描绘的一个有曲线边界的工件和一个有严重加工误差的形状表面区域的刀具路径生成方法的收敛性。

为了简单起见, 我们指定约束式 (5.9) ~ 式 (5.10) 没有定义实际表面。设想我们用平头刀切削表面, 而且表面的最小曲率半径 $R = 45$ 。我们可以要求皱褶高度不超过 $h = 0.1 \text{ mm}$ 。将 $R = 45$, $h = 0.1$ 代入

式 (5.9) 中, 产生 $d < 1.25$ 。我们这样会把这个约束强加到整个区域, 即使在很多点处的最小距离将会被低估, 而且误差用下式计算 (见图 5.7):

$$\varepsilon = \exp\left(-\left|y - 0.5(L_y - 6) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x - 0.5}\right) + 0.5\right|\right)$$

图 5.7 所示为适应罚函数和边界的刀具路径生成, 该曲线刀具路径的生成满足由 $p(D) = [\min(D, 0)]^2$, $\delta\lambda = 1$, $\lambda_v = 10$, $\lambda_p = 0.9$ 指定的约束条件。

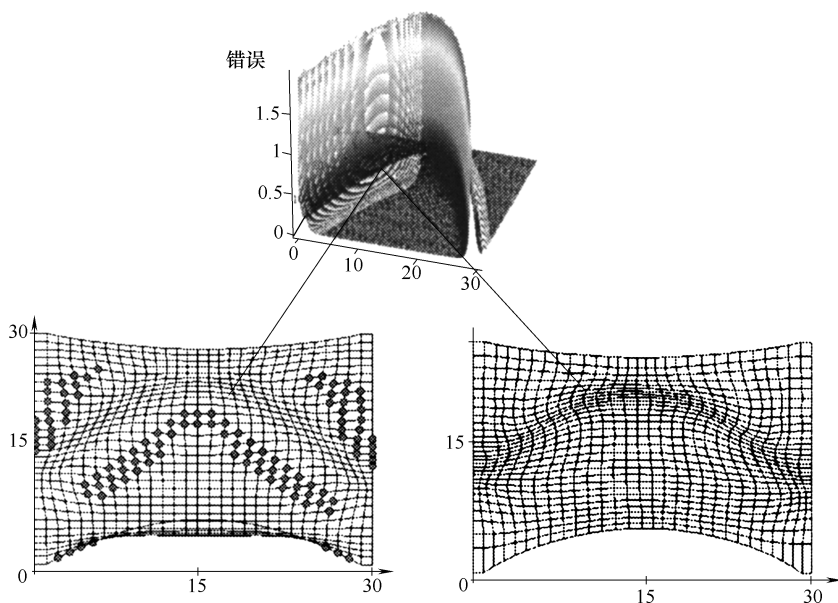


图 5.7 适应罚函数和边界的刀具路径生成

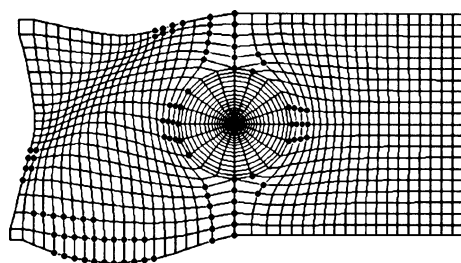
表 5.1 所示为 λ_p - θ 迭代方法的收敛性, 揭示出 $\lambda_p = 0.9$, $v = 0.25$ 在这个特例中导致的最佳收敛速度。标志#表示一种情况, 当迭代次数没有限制并且迭代波动或者取得无穷大, 这种情况称为发散。

表 5.1 $\lambda_p - \theta$ 迭代方法的收敛性

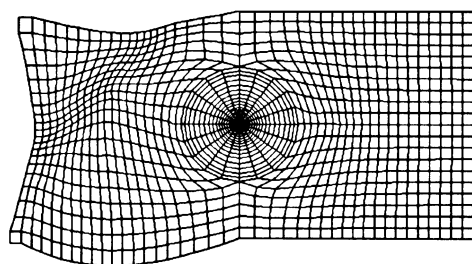
$\lambda_p \backslash \theta$	0.10	0.25	0.50	0.75
0.01	836	900	1001	1200
0.10	301	320	380	402
0.25	115	54	331	380
0.50	201	56	256	371
0.90	90	52	210	330
1.00	82	58	201	301
1.25	78	63	180	270
1.50	#	#	#	265
1.75	#	#	#	#

(2) 例 5.3 一个螺旋刀具路径嵌入一个之字形刀具路径

这个例子演示了如何生成一个由不同类型的刀具路径组成的刀具路径。在图 5.8 中生成的刀具路径已经适用于曲线边界和位于圆形区域内大的加工误差的三个地带以及左边的部分区域。像例 5.2 中的一样，表面曲率和皱褶高度已经人为设定，也就是说，并没有使用一个实际表面。



(a)



(b)

图 5.8 由无约束最小化和约束最小化得到的网格

(a) 由无约束最小化得到的网格 (b) 由约束最小化得到的网格

在图 5.8a 中的网格是通过一个无约束最小化建立的。很明显，这个网格是不能被接受的，因为它有很多约束不能满足的点。最大皱褶高度大约比指定的数值大 50 倍之多。而且，为了防止一个位于不相关区域内网格点间太小的距离，强加一个较低的约束是很有用的，增加的二阶约束由下式给出：

$$d - w' \geq 0, \varepsilon < \varepsilon_1$$

其中， ε_1 是一个小的正常数。这个有助于避免退化网格。

由 $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ， $w = 1.6$ ， $w' = 0.6$ 生成的刀具路径如图 5.8b 所示，恰好服从两个由 $p(D) = [\min(D, 0)]^2$ ， $\delta\lambda = 1$ ， $\lambda_v = 10$ ， $\lambda_p = 0.25$ 指定的约束。

(3) 例 5.4 Bezier 曲面

约束最小化技术可以生成一种经常不会降低（甚至增加） ε 的网格。这是因为我们的模型意味着精度是取决于 (ε, h) 的，而不是完全由 ε 决定的。因此，如果最小值不能降低误差，用户要么增加刀具轨迹的数量，要么在 ε 和 h 之间应用尝试法。下面的例子演示了尝试法的过程。我们认为 Bezier 曲面（见图 5.9）是由下面的控制点描述的。

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 36 & 36 & 36 & 36 \end{pmatrix}, B_y = B_x^T, B_z = \begin{pmatrix} -16 & -8 & -6 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

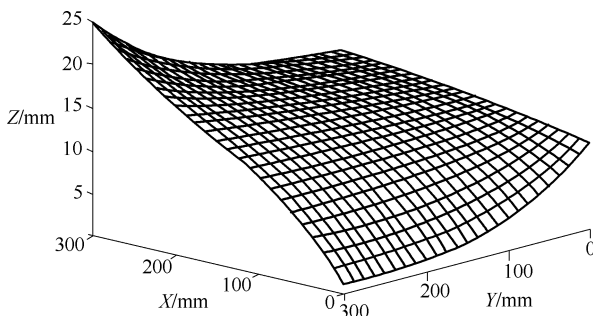


图 5.9 一个测试用 Bezier 曲面

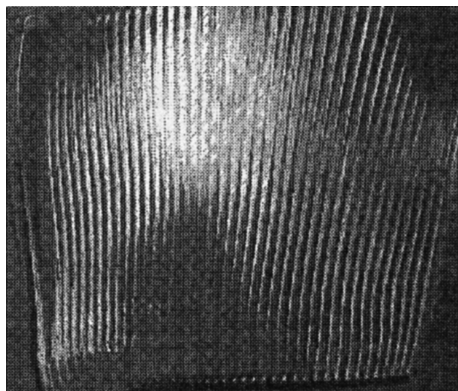


图 5.10 实际加工的 Bezier 曲面

图 5.10 所示为一个实际加工的 Bezier 曲面。图 5.11a 所示为常规的刀具路径。不符合条件的点被大小和距约束的距离成比例的圆点表示出来，而 ε 值很大的点用方格按相对 ε 的比例显示出来，结果是 $\varepsilon = 0.08$ 。

图 5.11b 所示由无约束最小化生成的网格 $\varepsilon = 0.04$ 。最后，图 5.11c 所示的约束最小化产生了 $\varepsilon = 0.085$ 。为了构造一个合适的刀具路径，要么最大程度地允许皱褶高度，要么网格点的数量必须得增加。我们分析了提出的这两个措施。将 h 从 0.01 增加到 0.04，一条合适的刀具路径满足指定的皱褶约束 $\varepsilon = 0.041$ 。从另一个方面来讲，图 5.11d 所示范围内 $\varepsilon = 0.021$ ，刀具路径有 35×35 个 CL 点，而常规的 35×35 刀具路径仍然不满足皱褶约束。如果仅有交叉调整是必要的。就观察调整刀具路径的可能性，一个合适的刀具路径可以完全由罚函数演示，即由 $I_s + \lambda_p I_p$ 给出的离散函数。另外，皱褶约束也可被包括在 F_p 或者甚至调和函数式 (5.12) 里。最后一种可能性将会在下一节中介绍。正交性也能被包括在算法中，以确保防止退化网格和离散。

一系列测试表面已经通过提出的算法测试过了。表 5.2 显示在 32% ~ 43% 之间增加的平均精度值。

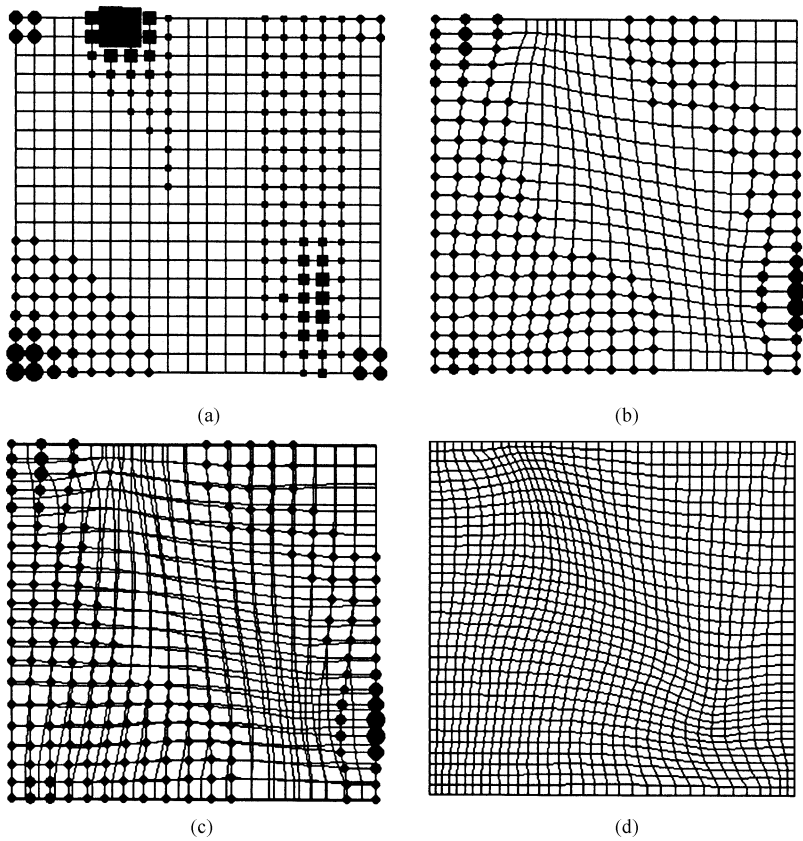


图 5.11 加工贝济埃曲面的刀具路径

(a) 常规刀具路径 (b) 无约束最小化 (c) 约束最小化 (d) 35 × 35 网格的约束最小化

表 5.2 加工表面的精度

网格大小	皱褶/mm	相对于常规方法的改进
10 × 10	3. 60	34/0. 2600%
20 × 20	1. 80	41/0. 0930%
30 × 30	1. 20	34/0. 0580%
40 × 40	0. 90	36/0. 0410%
60 × 60	0. 60	32/0. 0260%
80 × 80	0. 45	40/0. 0180%

显然，相关的皱褶约束会严重影响解的好坏。此外，最小化问

题的解不是唯一的，或者有可能不存在。在实践中，初始网格通常不满足约束且无先前知识验证是否存在这样的网格。因此，其收敛性通过数值试验来分析。注意：自适应方法既不允许闭合形式地估计轨迹的数量，也不允许估计一条轨迹上的 CL 点的个数。因此，我们改进了实际可行的规则来符合大多数实际情况。如果不满足皱褶约束的 CL 点数量超过点总数的 $2/3$ ，就不可能调整或者要求大量的迭代。换句话说，算法的计算效率取决于重分布容许的点的数量。如果这个数量很小，误差不会大幅度地减少，而且最优化网格可能根本就不会存在。即使这种网格存在，迭代收敛还是会失败。表 5.3 阐述了对于一个 40×40 之字形刀具路径算法构造 Bezier 曲面的计算复杂性。精度提高的比例 $\varepsilon_R = 100\varepsilon/\varepsilon_C$ ，其中 ε_C 是在矩形网格上的误差， τ_C 是在 PC 计算机（Pentium4）上的计算时间， I' 是要求迭代的次数， N_B 是不合格点的个数，违反约束 $h = 0.01$ ，从初始矩形网格来看，# 表示的是发散。观察 $h = 0.015\text{mm}$ 导致相对于矩形刀具路径的精度增加了 40%，而 $h = 0.013\text{mm}$ 只增加了 22%， $h = 0.001\text{mm}$ 和 $h = 0.012\text{mm}$ 实际上误差增加了。值得注意的是： $h = 0.015\text{mm}$ 好像是最合适的，因为皱褶高度和误差被近似地认为是同一数值。计算显示 h 和 ε 在变化相同时经常导致迭代的最小次数。这意味着适当的皱褶高度可以被视为相应的常规刀具路径 ε 的一部分。

表 5.3 网格生成算法中 h - ε 的收敛性

皱褶 h/mm	计算时间 τ_C/min	迭代 I'	误差 ε	相对常规方法 ε_R 的误差	不合格点 N_B 的数量
0.0001	#	#	#	#	1132
0.0010	32	1710	0.094	200	500
0.0012	11	550	0.047	105	92
0.0130	9	421	0.032	78	61
0.0150	4	250	0.024	59	25
0.0170	3	200	0.020	55	0

网格生成技术的应用为刀具路径的生成提供了很多方便,如针对大加工误差区域的全局二维适应性。与很多刀具路径生成方法(见概述)相反,网格所要求的全局最小值是同时适应所有 CL 点的。当然这种适应会导致某些失误,比如可能存在发散、较长的计算时间等。然而,网格生成技术所接受的解决方案几乎不能被局部方法所接受,局部方法需要很长的时间来达到相同的最佳效果。而且,网格生成算法不仅提供了一个与皱褶高度相关约束的简单控制,而且也提供了对复杂形状边界的工件和剪裁曲面生成刀具路径的可能性。

最后,网格生成技术尤其适合与常用的 CAD/CAM 软件结合起来,该算法处理标准之字形或螺旋曲线的曲线版本。因此,这种改进只要求通过网格生成程序获得一种附加的映射。

5.4 调和函数对刀具路径生成的应用

设想 $S=S(u, v) \equiv (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示在工件坐标系中给出的要求表面,其中, u 和 v 是参数变量。考虑一系列 CC 点, $\{(u, v)_n\}$, $1 \leq n \leq N_n$, 是平面 (ξ, η) 上的计算区域到定义在参数坐标系 (u, v) 上的物理区域的一个离散映射(见图 5.4)。

一个常见的例子为由曲线四边形组成的规则或结构化的网格,如图 5.12 所示的规则网格,或者是如图 5.13 所示的块结构化网格。在这两个例子中,网格对一个矩形笛卡儿网格不是拓扑等价的。这两个例子逐个援引平面 (ξ, η) 上单位四边形的映射到平面 (u, v) 内的每个四边形区域。块结构网格也能用于构造 SFC,而用普通不规则网格用来构造一个合适的 SFC 已经超出了这本书的范围。

网格生成问题可以被视为一个发现函数 $u(\xi, \eta)$ 和 $v(\xi, \eta)$ 问题的离散模拟。很明显,如果一个范围到另一个范围边界上为一一映射的平滑映射,其具有正的雅可比系数^[1]。因此,如果映射 $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ 的雅可比系数都是正的,则在 (u, v) 范围内构造的曲线坐

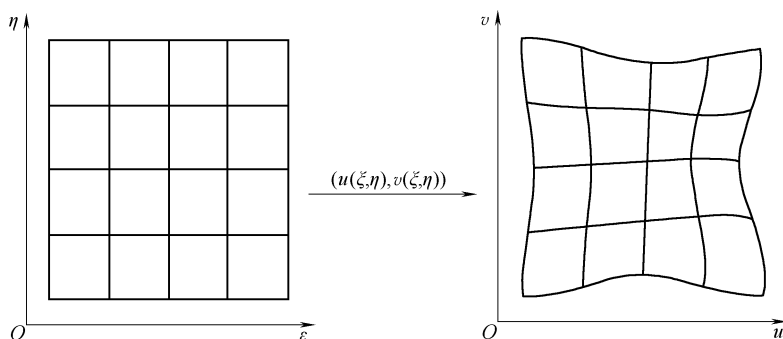


图 5.12 规则网格的例子

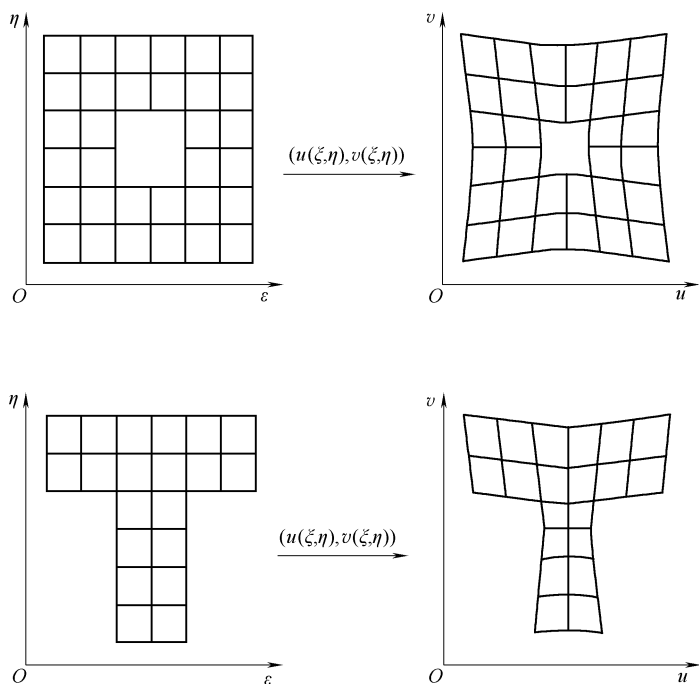


图 5.13 块结构网格的例子

标系将会是非退化型的，如

$$J = u_{\xi}v_{\eta} - u_{\eta}v_{\xi} > 0 \quad (5.13)$$

许多网格生成技术已经被开发出来^[47]。一般来讲，结构化网格的生成方法可以被分为三个基本类型，即代数法、微分法和差分法。代

数法中, 网格内部点是通过各种插值或特殊函数形式来计算的。微分法中, 生成网格点是基于椭圆方程或抛物线方程的解决方法。在差分法中, 网格生成通过网格质量特性的最优化, 如非退化性、光滑性、单调性、近似正交性或者适应性 (见文献 [15, 19, 37, 38])。

这一节提出基于 Ivanenko 变分网格生成法的网格生成技术^[39]。网格被视为映射 $\{u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\}$ 的一个离散描述, 其中, $\{u, v\}$ 最小化为一个 Dirichlet 函数式 (5.12)^[39]。

这种解决方案的离散描述就是所谓的适应性调和网格, 它是在控制函数 $f(u, v)$ 大的梯度范围内用小单元描述 (例如, 见图 5.14)。网

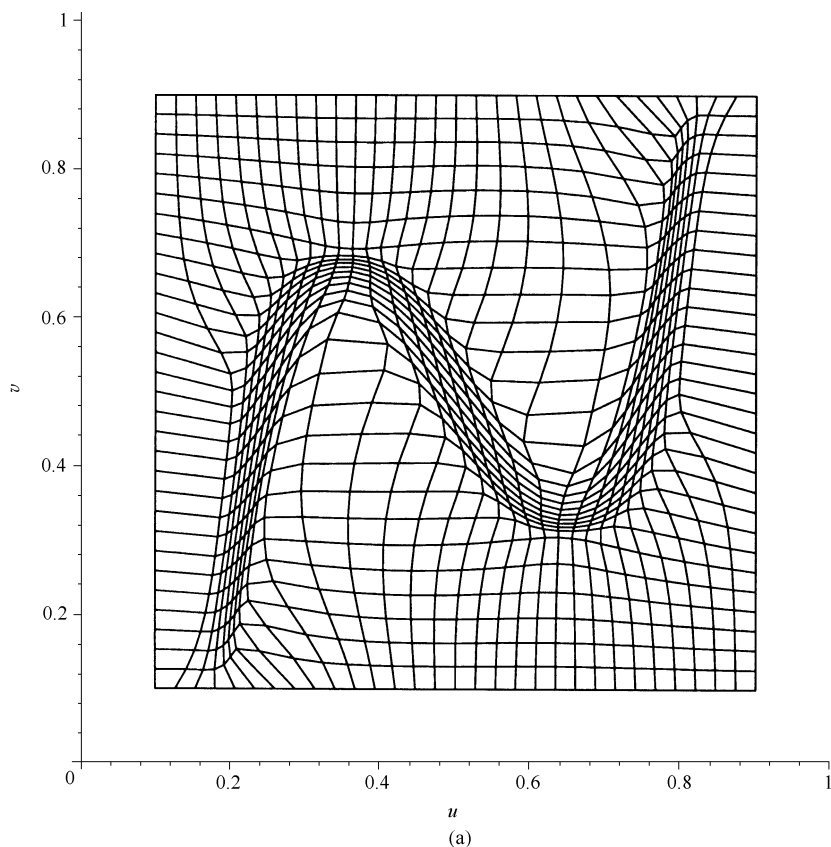


图 5.14 适应性调和网格

(a) 适应性调和网格的例子

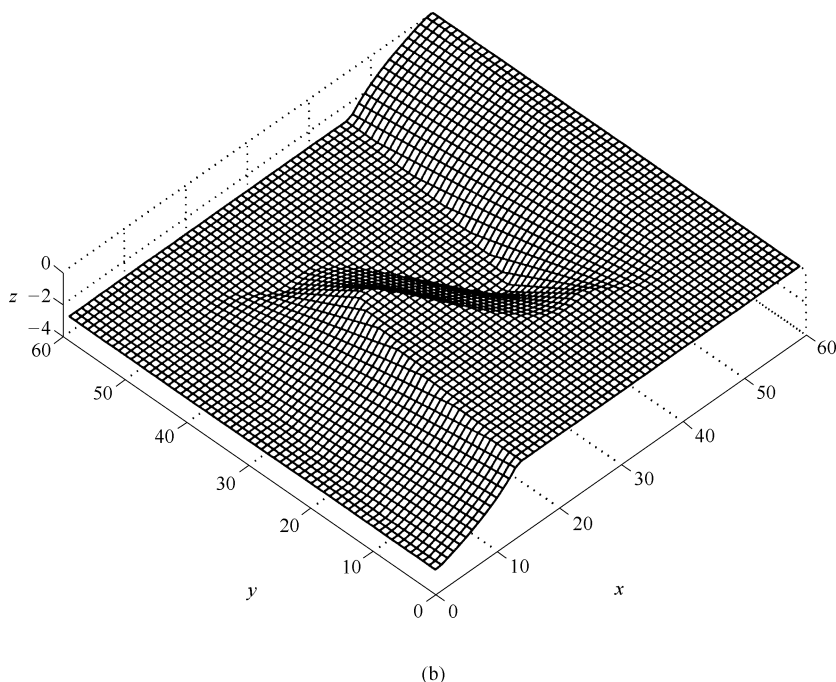


图 5.14 适应性调和网格 (续)

(b) 控制函数

格也可以被解释为从单位正方形到参数化区域的一种映射, 表面 $f(u, v)$ 的相应映射到参数化区域是调和的。更深层的理论细节在文献 [39] 里能找到。

我们下面介绍的数据结构适合任何一个规则的或块结构的网格。 $C_o(N, k)$ 在局部和全部节点数之间定义了相应的值。

$$C_o(N, k) = n \quad n = 1, \dots, N_n \quad N = 1, \dots, N_e \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (5.14)$$

其中, n 是全部节点数, N_n 是网格节点的总数, N 是单元号, N_e 是一组单元, k 是单元中的局部节点数。单元顶点在顺时针方向上编号为 1~4。每个顶点都跟一个三角形相关联: 顶点 1 和 Δ_{412} , 顶点 2 和 Δ_{123} , 顶点 3 和 Δ_{234} , 顶点 4 和 Δ_{341} 。这很容易被描述为 $2A_{k-1, k, k+1} = J_k^{[39]}$ 。其中, A 代表相应三角形的面积, 而且 $J_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 是映射的雅可比系数, 由式 (5.15) 给出:

$$J_k = (u_{k-1} - u_k)(v_{k+1} - v_k) - (u_{k+1} - u_k)(v_{k-1} - v_k) \quad (5.15)$$

其中, 若 $k=1$, $k-1=4$; 若 $k=4$, $k+1=1$ 。这种数据结构的例子如图 5.15 所示。

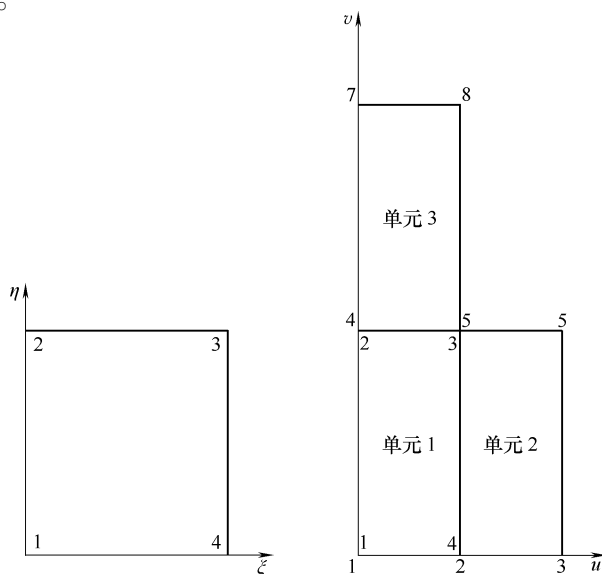


图 5.15 在 (ξ, η) 平面的单元网格到 (u, v) 平面的四边形网格映射的相应的节点数

函数 $N'(n, d)$ 定义了网格节点 n 和 d 方向上它的相邻点之间的对应关系, $d \in \{\text{左, 右, 上, 下}\}$ 。函数式 (5.12) 被近似为下面的这个离散函数:

$$I \approx I^h = \sum_{N=1}^{N_e} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{4} [F_k]_N \quad (5.16)$$

其中

$$F_k = \frac{D_1 [1 + (f_u)_k^2] + D_2 [1 + (f_v)_k^2] + 2D_3 (f_u)_k (f_v)_k}{J_k [1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$D_1 = (u_{k-1} - u_k)^2 + (u_{k+1} - u_k)^2$$

$$D_2 = (v_{k-1} - v_k)^2 + (v_{k+1} - v_k)^2$$

$$D_3 = (u_{k-1} - u_k)(v_{k-1} - v_k) + (u_{k+1} - u_k)(v_{k+1} - v_k) \quad (5.17)$$

$$J_k = (u_{k-1} - u_k)(v_{k+1} - v_k) - (u_{k+1} - u_k)(v_{k+1} - v_k)$$

式中的 $(f_u)_k$ 和 $(f_v)_k$ 是控制函数在 u 和 v 方向上的导数, 在单元 N 的节点 k 处。网格单元的凸面要求雅可比系数为正^[37]:

$$[J_k]_N > 0 \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad N = 1, \dots, N_e \quad (5.18)$$

离散函数式 (5.16) 数值上的最小化应用一个初始网格作为第一次迭代。最小值是按这种方法设计的, 最小值是在一个由凸的四边形组成的网格上实现的。这一特性增强了网格生成程序的稳定性。而且, 显然如果一系列凸网格相对于映射不是空的, 则就称为代数方程组:

$$\begin{aligned} R_u &= \frac{\partial I^h}{\partial u_n} = 0 \\ R_v &= \frac{\partial I^h}{\partial v_n} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

至少一个解, 并是凸网格。

设想网格在迭代的 l^{th} 步已经确定, 网格在 $(l+1)^{th}$ 步是用准牛顿过程进行计算的, 如下所述:

$$\begin{aligned} u_n^{l+1} &= u_n^l - \tau \left(R_u \frac{\partial R_v}{\partial v_n} - R_v \frac{\partial R_u}{\partial v_n} \right) \left(\frac{\partial R_u}{\partial u_n} \frac{\partial R_v}{\partial v_n} - \frac{\partial R_v}{\partial u_n} \frac{\partial R_u}{\partial v_n} \right)^{-1} \\ v_n^{l+1} &= v_n^l - \tau \left(R_v \frac{\partial R_u}{\partial u_n} - R_u \frac{\partial R_v}{\partial u_n} \right) \left(\frac{\partial R_u}{\partial u_n} \frac{\partial R_v}{\partial v_n} - \frac{\partial R_v}{\partial u_n} \frac{\partial R_u}{\partial v_n} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

其中, τ 是迭代参数, 为了网格保持凸形而选择的。在每一步, 式 (5.18) 中的条件都是被证明过的。如果不满足式 (5.18), 则 τ 会减小一半, 而且网格在 $(l+1)^{th}$ 步也会被重新计算。在 Appendix 中给出了计算公式的推导, 归纳为公式 (5.20) 以适合计算机编程。

在刀具路径生成时, 控制函数 f 的梯度相当于刀具路径间的加工误差 (褶皱)。因为刀具路径是一系列离散点, 相对于一个给定的表面, 控制函数 $f_u(u, v)$ 和 $f_v(u, v)$ 的导数不能直接求出。因此, 这些导数被人为地生成。最初, $f_u(u, v)$ 和 $f_v(u, v)$ 被设置为零。然后

$$(f_u)_n^{l+1} = \begin{cases} (f_u)_n^l + \lambda_+ & s_u(n) > 0 \\ (f_u)_n^l - \lambda_- & \text{其余} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$(f_v)_n^{l+1} = \begin{cases} (f_v)_n^l + \lambda_+ & s_v(n) > 0 \\ (f_v)_n^l - \lambda_- & \text{其余} \end{cases}$$

其中, λ_+ 和 λ_- 是规定的增加量和减少量, $s_u(n)$ 和 $s_v(n)$ 在皱褶节点 n 的近似值, 如下:

$$\begin{aligned} s_u(n) &= \max_{d \in \{\text{左}, \text{右}\}} [D(n, N'(n, d)) - T(n, N'(n, d))] \\ s_v(n) &= \max_{d \in \{\text{上}, \text{下}\}} [D(n, N'(n, d)) - T(n, N'(n, d))] \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中, $D(n, m)$ 是节点 n 和 m 之间的距离, 由式 (5.23) 给出:

$$D(n, m) = |S(u_n, v_n) - S(u_m, v_m)| \quad (5.23)$$

$T(n, m)$ 是一个加工带宽度在中点 $S\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{v_n + v_m}{2}\right)$ 的估计值。

网格生成算法由下列几步组成:

1) 生成初始凸网格。网格是通过手动或插值生成。注意插值产生的网格是会有区域边界外的节点。在这种情况下, 几个迭代可以由经典的 Brackbill 和 Saltzman 方法来实现^[15], 这些方法可以将节点移回到区域里。初始网格不一定满足皱褶约束。如果网格对于每个节点都满足约束, 则网格修改就是不必要的。从另一方面来讲, 它意味着节点的数量被高估了, 而且就会减少。初始网格的大小 (l_r 行和 l_c 列) 会根据式 (5.24) 估算:

$$\begin{aligned} l_r &= \left\lceil \frac{W_v}{2r} \right\rceil \\ l_c &= \left\lceil \frac{W_u}{2r} \right\rceil \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中, W_u 和 W_v 分别是在 u 和 v 方向上的表面尺寸, r 是切削刀具半径。

2) 通过最小化 Dirichlet 函数来修改网格, 直到达到指定迭代次数。

3) 通过插入额外节点来细化网格。如果网格不适应皱褶高度约束, 就需要更多的网格点。对于有 l_r 行和 l_c 列结构化网格来讲, 行和列的数目在下一步按照式 (5.25) 估算:

$$l_r^{new} = l_r + \left(\frac{\max_1 \leq i \leq l_r \left(\sum_{j=1}^{l_c-1} [D(n_{i,j}, n_{i,j+1}) - T(n_{i,j}, n_{i,j+1})] \right)}{2r} \right)$$

$$l_c^{new} = l_c + \left(\frac{\max_1 \leq j \leq l_c \left(\sum_{i=1}^{l_r-1} [D(n_{i,j}, n_{i+1,j}) - T(n_{i,j}, n_{i+1,j})] \right)}{2r} \right)$$
(5.25)

其中, $n_{i,j}$ 是在行 i 和列 j 上的网格节点。对于块状网格, 网格先被划分为小的块状结构化网格, 再对每一个块状网格实现细化。对于列的迭代, 网格被垂直划分, 如图 5.16b 所示; 而对于行的迭代, 网格被水平划分, 如图 5.16c 所示 (也可参见例 5.6 中的图 5.23)。

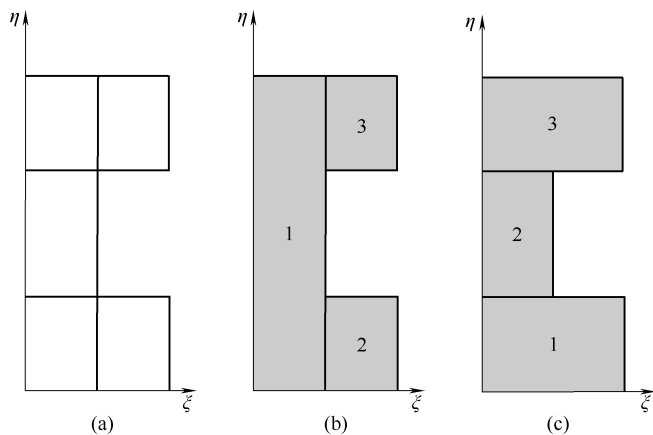


图 5.16 块状网格分割的精确化

(a) 块状网格 (b) 垂直划分网格 (c) 水平划分网格

4) 通过最小化 Dirichlet 函数来修改网格, 直到所有网格点都满足皱褶约束, 或者达到指定的迭代次数。

5) 如果皱褶约束不满足一部分点, 继续回到第 3) 步的细化

网格。

如果在函数式 (5.12) 的分母中的第三项被忽略了, 则算法收敛得越快且表现得更稳定。对于式 (5.16) 中的每个 F_k , 为了从几何学角度上解释这一项, 就考虑由式 (5.26) 给出的从局部节点 k 到 $k-1$ 和 $k+1$ 的两个向量:

$$\begin{aligned} v_{k,k-1} &= (u_k - u_{k-1}, v_k - v_{k-1}) \\ v_{k,k+1} &= (u_k - u_{k+1}, v_k - v_{k+1}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

很明显

$$\begin{aligned} v_{k,k-1} v_{k,k+1} &= (u_k - u_{k-1})(u_k - u_{k+1}) + (v_k - v_{k-1})(v_k - v_{k+1}) \\ &= D_3 = |v_{k,k-1}| |v_{k,k+1}| \cos \theta \end{aligned}$$

其中, θ 是两个向量间的夹角。因此,

$$F_k = \frac{\frac{D_1}{c}[1 + (f_u)_k^2] + \frac{D_2}{c}[1 + (f_v)_k^2] + 2(f_u)_k(f_v)_k \cos \theta}{\frac{J_k}{c}[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.27)$$

其中, $c = |v_{k,k-1}| |v_{k,k+1}|$ 。因此, 省略最后一项会引起角度方面较小影响。最后, 通过一个合适的 τ 得到了凸单元。

5.5 块结构化网格的空间填充曲线的生成

关于块结构化网格的空间填充曲线刀具路径的生成, 是通过在上节提出的网格生成算法上附加一个额外的要求。在每一个精细化阶段, 网格的任意大小子块横向或纵向划分网格都必须是偶数的。对于生成 Hamiltonian 路径, 即在块状结构化网格上的生成空间填充曲线, 这是一个充分条件。这个结论的证明是非常直接的, 因为在任意尺寸块上的所有点都被小矩形环绕起来。空间填充曲线生成算法将小回路合并为大回路。图 5.17 阐述了块状结构化网格上的空间填充曲线的生成。首先, 一个顶点被置于每个网格单元的中心, 如图 5.17b 所示。然后,

每一个顶点都被连接到相邻单元的顶点，如图 5.17c 所示。最后，通

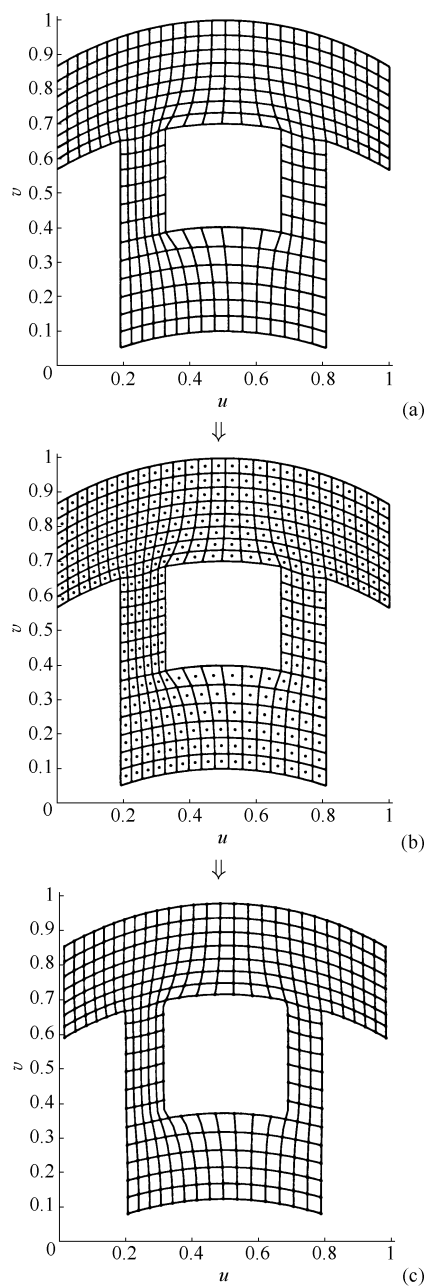


图 5.17 无向图构造 SFC 刀具路径

(a) 步骤一 (b) 步骤二 (c) 步骤三

过每四个相邻的点构造小矩形生成小回路，即用偶数行和列上的点连接奇数行和列上的顶点，如图 5.18 所示。合并小回路就可以生成空间填充曲线了（见 4.3.2 节）。

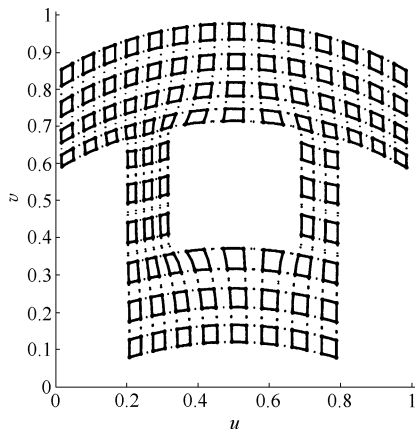


图 5.18 用小回路覆盖图 5.17 中的网格

空间填充曲线和网格生成技术相结合能够在有复杂不规则边界、隔断、型腔、岛状结构的表面上构造刀具路径，相关例子在下一节中给出。

5.6 实例与讨论

1. 实例

这一节提出了各种各样的例子，这些例子阐述了在刀具路径生成时应用曲线网格的效率和优点。

(1) 例 5.5 这个例子讲述了通过使用变分网格生成技术克服常规等参数方法刀具轨迹的生成效率低的问题。考虑一个单峰表面，其指数峰沿着参数域 (u, v) 内的一条线。这个表面由式 (5.28) 给出（见图 5.19）：

$$\begin{aligned} x &= 100u - 50 \\ y &= 100v - 50 \\ z &= 10\exp(-40(2u - 0.5 - v)^2) - 15 \end{aligned} \quad (5.28)$$

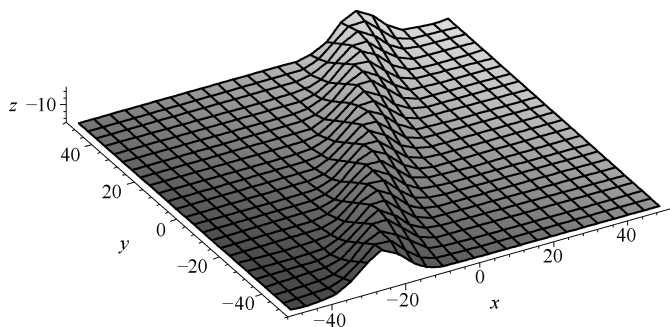
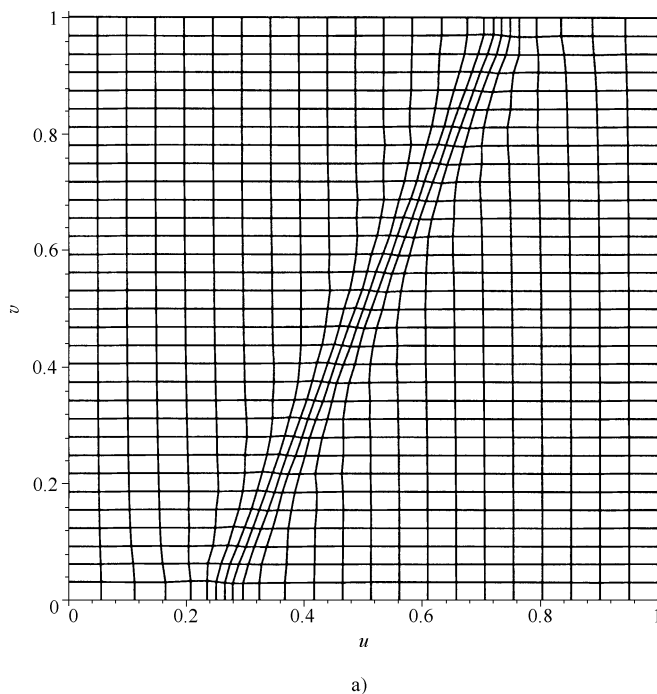


图 5.19 沿着一条线的指数单峰表面

一个用于半径为 3mm 的平头刀，而且表面公差为 0.1mm 的曲线网格如图 5.20 所示。通过常规等参数方法生成的 SFC 刀具路径和之字形刀具路径的比较，表 5.4 中提出了曲线网格方法。图 5.21c 所示为基于适应性网格的之字形刀具路径，刀具路径的长为 2558.28mm。

图 5.20 沿着 (u, v) 区域和工件坐标系内的曲线网格

(a) 沿着 (u, v) 区域内的曲线网格

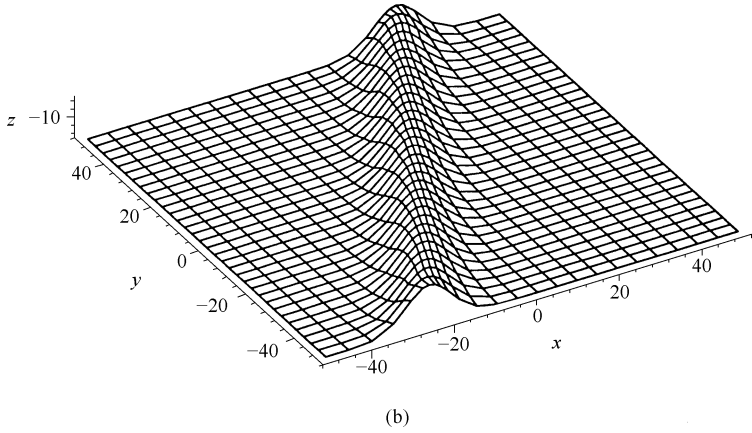


图 5.20 沿着 (u, v) 区域和工件坐标系内的曲线网格 (续)
(b) 在工件坐标系内一条线的曲线网格构造

SFC 刀具路径要求一个有小空间步距的基本 (等参数) 网格。因此, 其刀具路径大约为 3066.87mm (如图 5.21b 所示)。最后, 曲线网格适应于刀具轨迹间距离小的区域, 导致一个 2519.88mm 较短路径 (如图 5.21d 所示)。

表 5.4 基于变分网格生成技术的刀具路径与等参数路径方案的比较

用于构造网格的方法	总路径长度/mm	
	垂直之字形	SFC
两个等参数刀具路径重叠	4716.91	3066.87
曲线网格生成	2557.74	2508.25

当与基于等参数刀具路径方法的之字形刀具路径和 SFC 刀具路径比较的时候, 基于自适应网格的之字形刀具路径和 SFC 刀具路径的长度分别缩短 45.76% 和 17.84% (如图 5.21 所示)。

SFC 刀具路径比标准之字形刀具路径好得多, 因为它在优化方向进行转向, 即在加工带最大的方向。而且, 矩形网格上两个调整轨迹间的步距设为最小, 以确保所要求的褶皱能沿着两个轨迹。曲线网格使改变轨道间距离成为可能, 只有在必要时才使步距变小。因此, 在一个新的基础网格内构建 SFC 效果更佳。

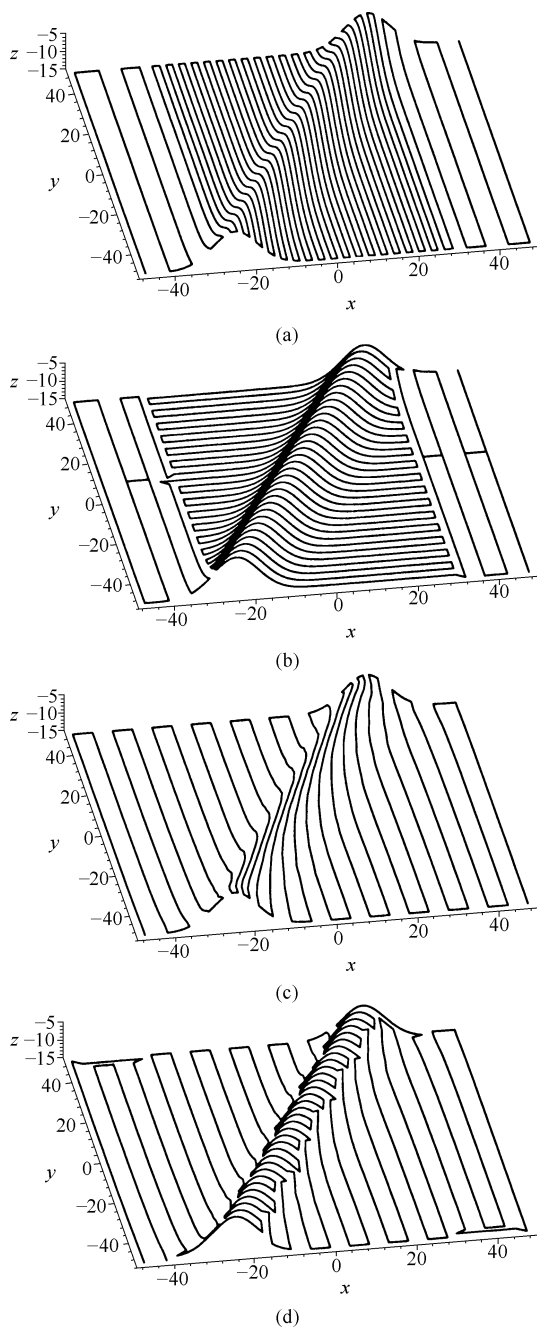


图 5.21 几种刀具路径

- (a) 等参数刀具路径 (b) 由两个等参数路径生成的 SFC 刀具路径
(c) 基于适应性网格的之字形刀具路径 (d) 基于适应性网格的 SFC 刀具路径

图 5.22 所示为收敛速率图。注意当放弃了 Direchlet 函数式 (5.12) 中分子的第三项, 算法的收敛速率增加了一点。虽然, 收敛速率中的增量不是太明显, 算法的复杂程度也由于通过消除这个第三项而降低了。因此, 网格要求花费较少的时间进行计算。

(2) 例 5.6 这个例子阐述了使用曲线网格和 SFC 构造刀具路径来加工有复杂不规则边界、隔断和岛状结构的表面。考虑例 4.3 中由公式 (4.8) 给出的一个双钟形表面。在 (u, v) 区域内, 表面只能在边界范围内被加工。图 5.23 所示为初始网格和第一次调整过的网格。最终的网格和 SFC 刀具路径分别如图 5.24 和图 5.25 所示。图 5.26 所示为 Unigraphics18 中应用 SFC 刀具路径生成例 5.6 中表面的五轴加工计算结果, 用于半径为 3mm 的平头刀, 其表面公差为 0.05mm。图 5.27 所示为对例 5.6 中网格生成技术的收敛速率。当放弃 Direchlet 函数式 (5.12) 中分子的第三项时, 算法的收敛速率也增加了一点。

(3) 例 5.7 考虑图 5.28a 中描述叶轮的一个叶片。这个叶片是用等参数方程描述的。当叶片破坏了的时候 (见图 5.28b), 可能会用新材料填充坏了的叶片, 然后只铣削填充的部分。由于叶片的这一部分包括位于 (u, v) 区域内的不规则边界, 常规等参数方法不能用于构造刀具路径。在有复杂不规则边界的这个等参数表面上应用网格生成方法, 适用于破坏了的叶片形状的最终曲线网格如图 5.29 (等参数区域) 和图 5.30 (工件坐标系) 所示。网格适应的表面是用半径为 5mm 的球头刀具铣削的, 加工表面的公差为 0.05mm。对于球头铣刀的加工带宽计算见 3.2 节。图 5.31 (等参数区域) 和图 5.32 (工件坐标系) 所示为用于加工破坏了的叶片的 SCF 刀具路径。图 5.33 所示为在 Unigraphics18 中应用 SFC 刀具路径的虚拟切削。

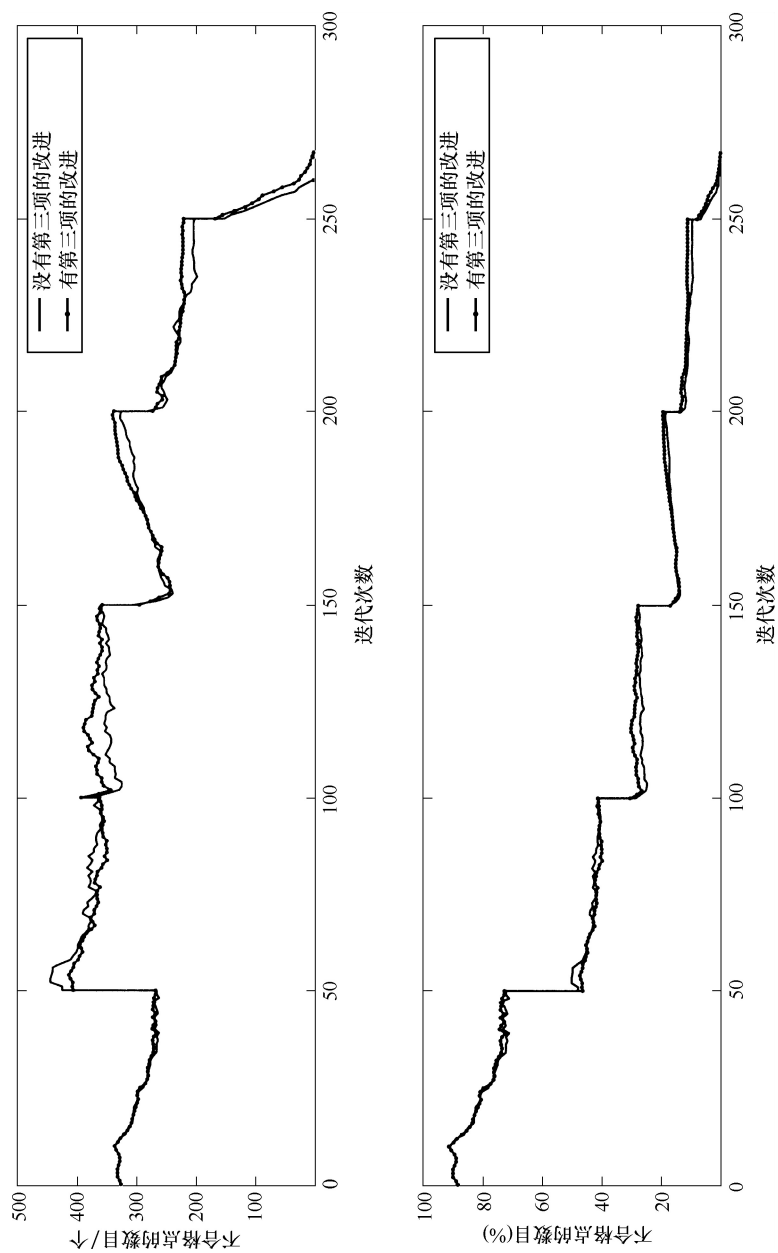
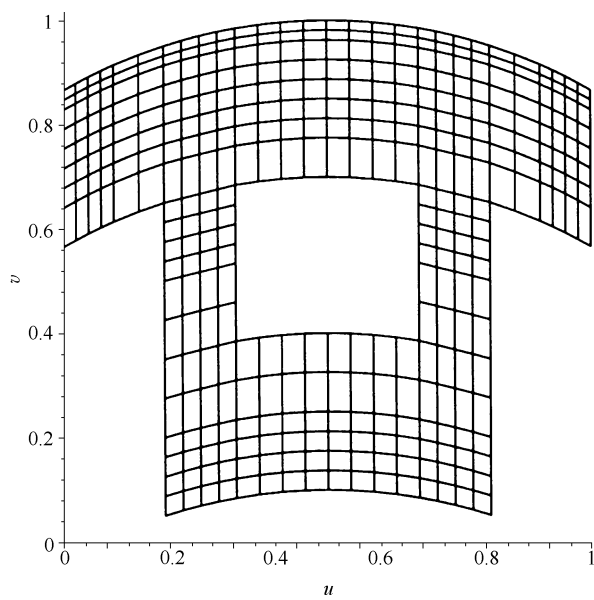
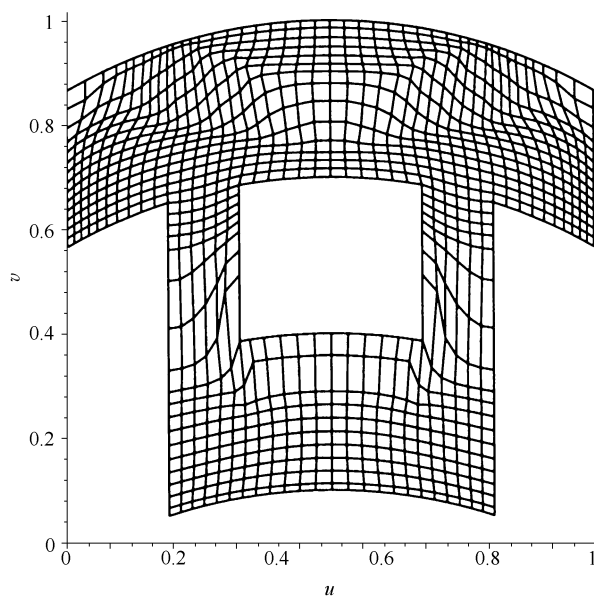


图 5.22 例 5.4 中的网格生成技术的收敛速率



(a)



(b)

图 5.23 网格调整

(a) 初始网格 (b) 第一次调整后的网格

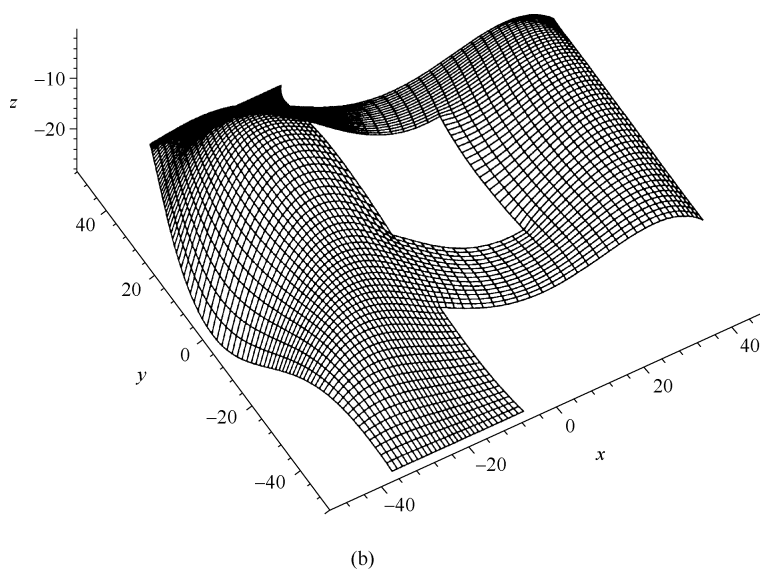
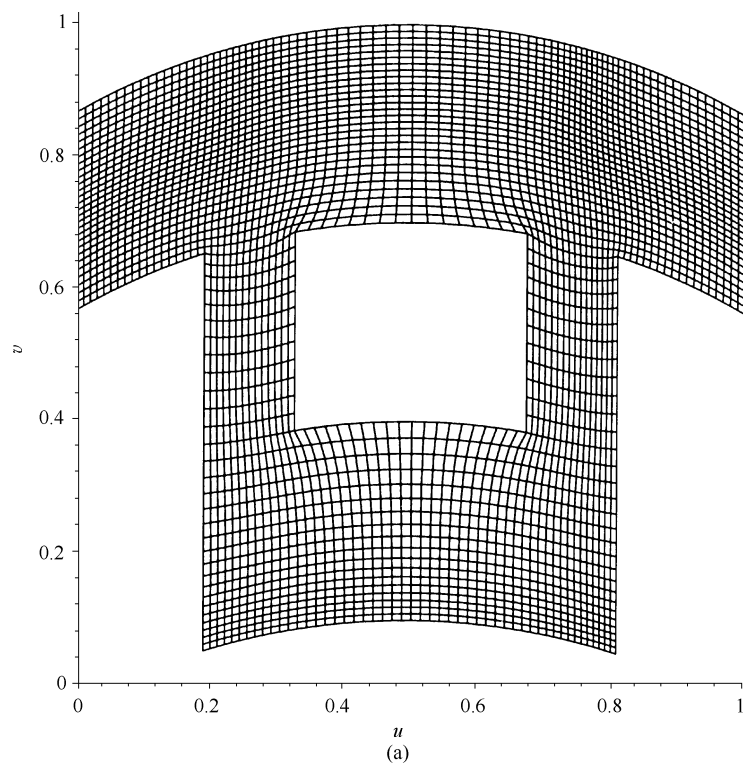


图 5.24 曲线网格的应用

(a) 曲线网格应用于例 5.6 中 (u, v) 区域内的表面

(b) 曲线网格应用于例 5.6 中工件坐标系内的表面

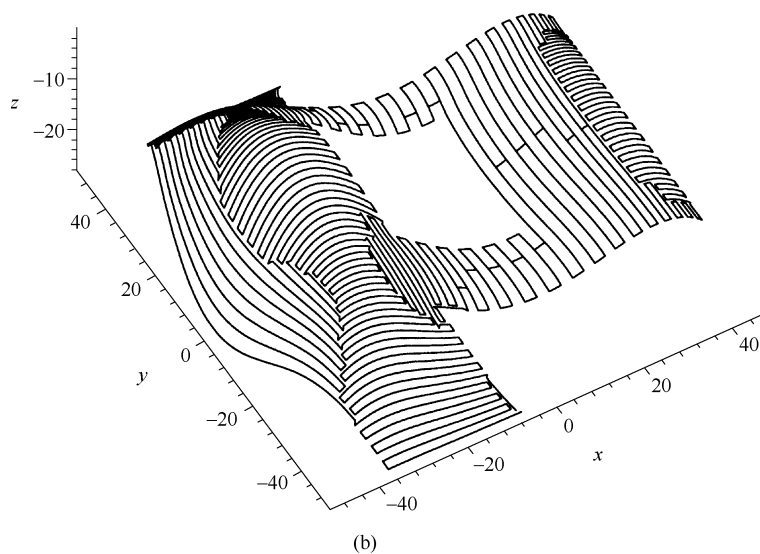
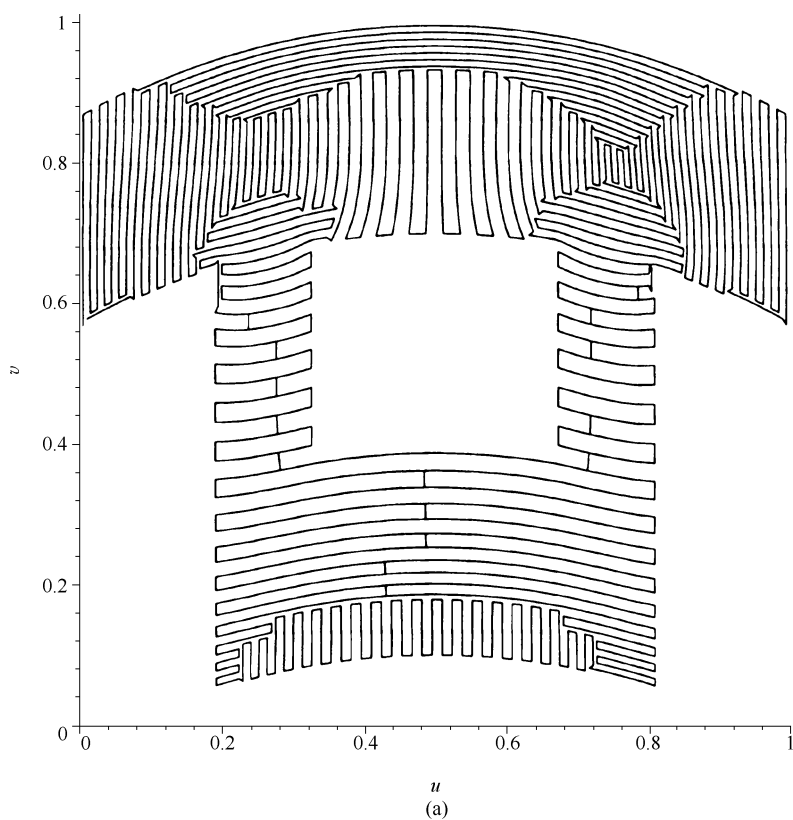


图 5.25 SFC 刀具路径

- (a) 用于例 5.6 中 (u, v) 区域内表面的 SFC 刀具路径
 (b) 用于例 5.6 中工件坐标系内表面的 SFC 刀具路径

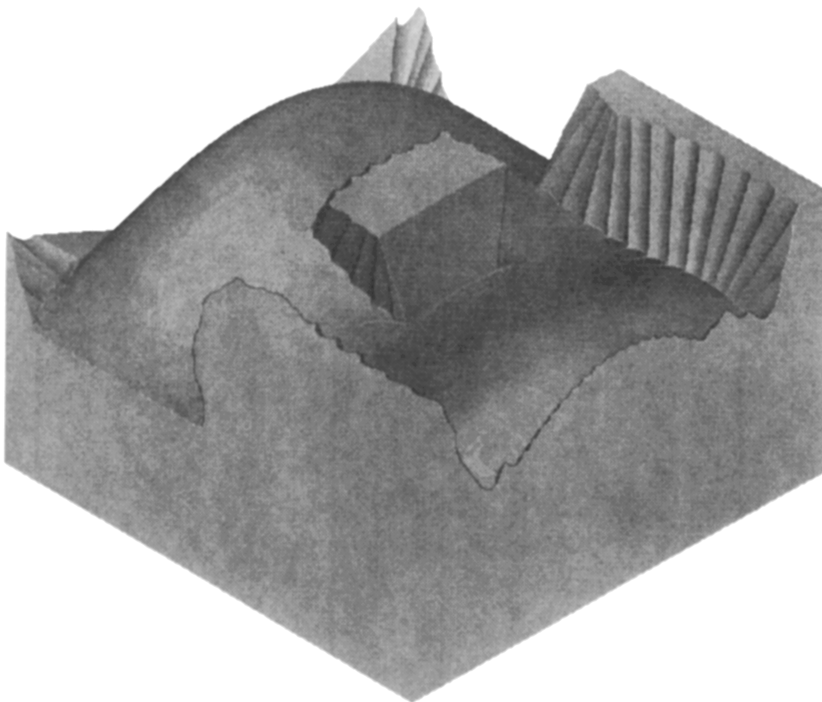


图 5.26 在 Unigraphics18 中应用 SFC 刀具
路径生成例 5.6 中表面的五轴加工计算结果

2. 适应性谐波网格生成计算公式的推导

离散函数式 (5.16) 的最小化要求计算 F_k 及其导数。 F_k 的计算包括三角形 $\Delta_{k-1,k,k+1}$ 上的三个网格节点。简单来讲, 节点 $k-1$ 、 k 和 $k+1$ 分别由 a 、 b 和 c 表示。 F_k 由 F 表示, 用式 (5.29) 表达:

$$F = \frac{X}{Y} \quad (5.29)$$

其中,

$$X = \frac{D_1 [1 + (f_u)_k^2] + D_2 [1 + (f_v)_k^2] + 2D_3 (f_u)_k (f_v)_k}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = (u_a - u_b)(v_c - v_b) - (u_c - u_b)(v_a - v_b),$$

$$D_1 = (u_a - u_b)^2 + (u_c - u_b)^2,$$

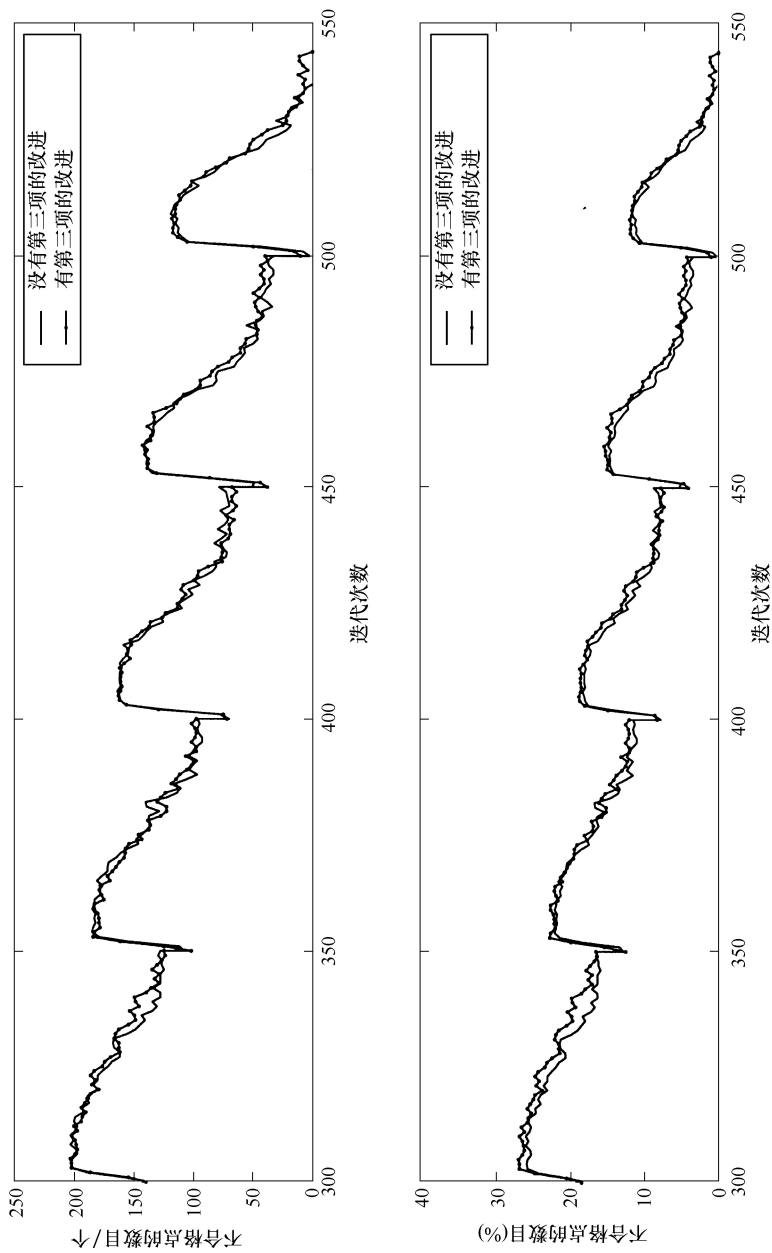


图 5.27 例 5.6 中应用网格生成技术的收敛速率

$$D_2 = (v_a - v_b)^2 + (v_c - v_b)^2 \quad (5.30)$$

$$D_3 = (u_a - u_b)(v_a - v_b) + (u_c - u_b)(v_c - v_b)$$

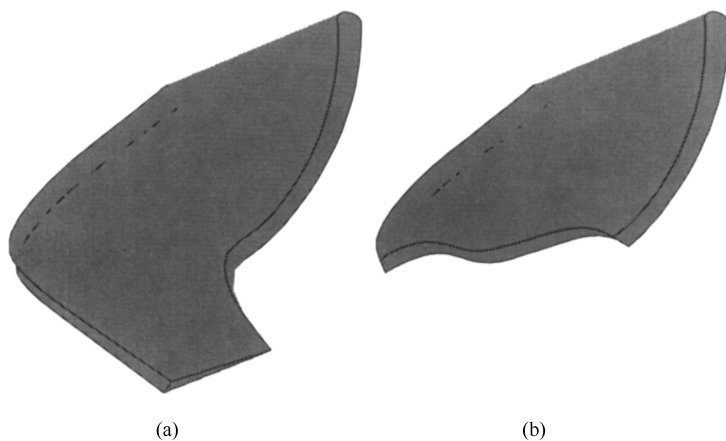
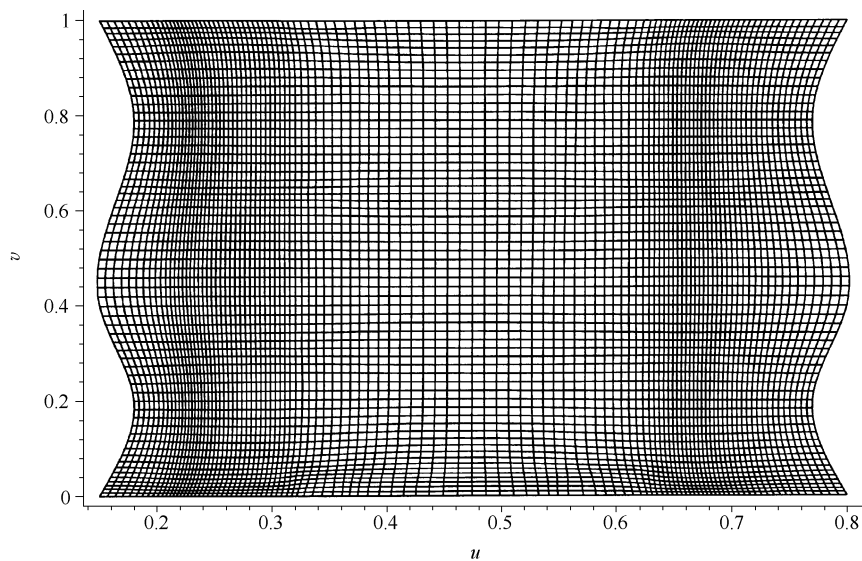


图 5.28 单个叶片

(a) 叶轮的一个叶片 (b) 叶片的一部分


 图 5.29 在 (u, v) 区域内适用于部分叶片表面的曲线网格

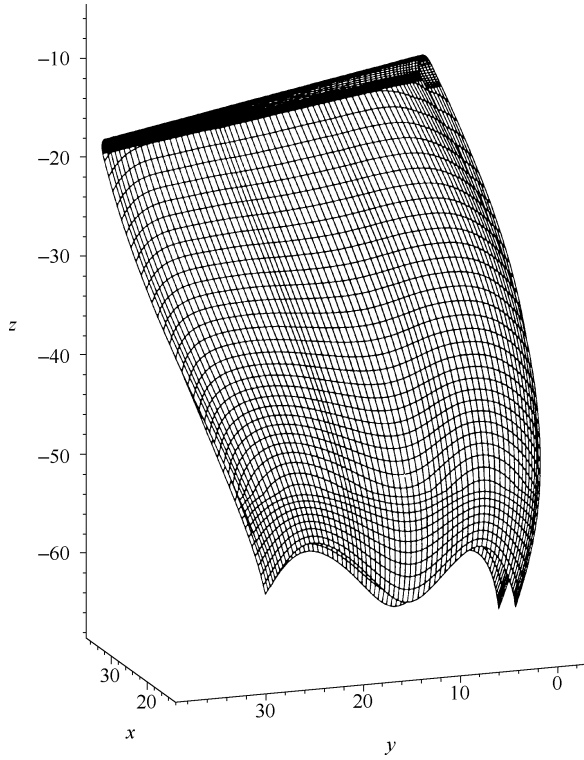


图 5.30 在工件坐标系内适用于部分叶片表面的曲线网格

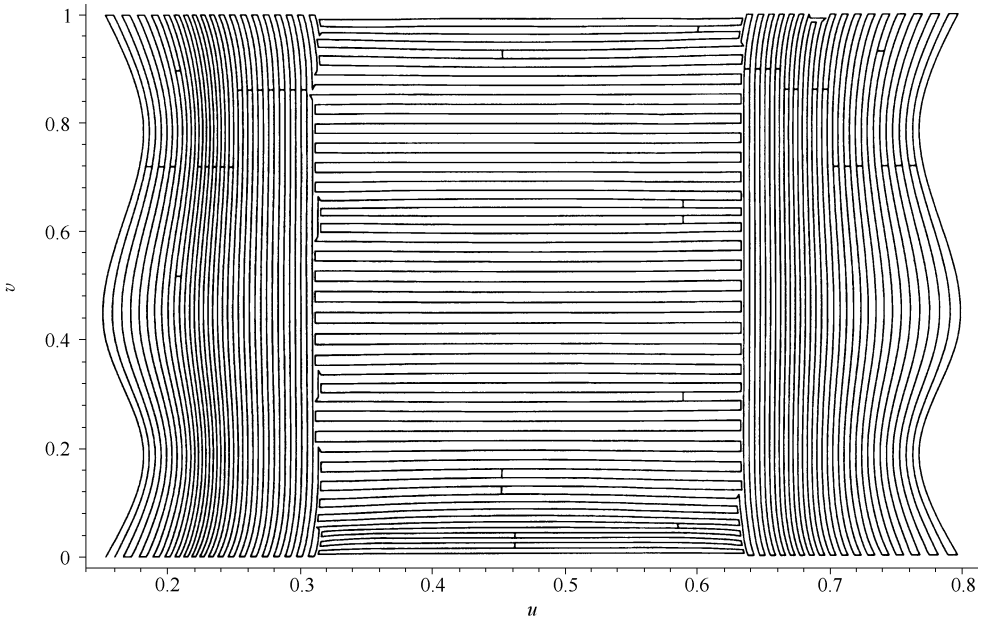


图 5.31 在 (u, v) 区域内用于加工破坏了的叶片的 SFC 刀具路径

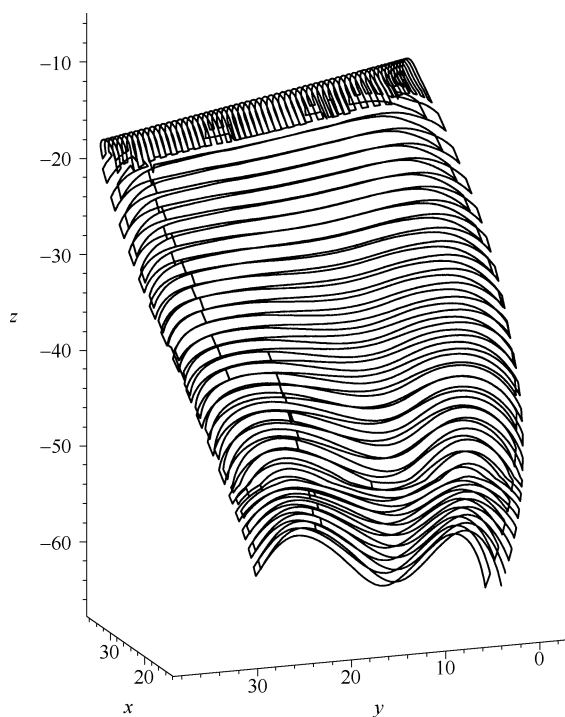


图 5.32 在工件坐标系中用于加工破坏了的叶片的 SFC 刀具路径

F 的导数公式可以表示为函数 X 和 Y 的导数, 由式 (5.31) 给出:

$$F_u = \frac{X_u Y - X Y_u}{Y^2} = \frac{X_u - F Y_u}{Y},$$

$$F_v = \frac{X_v Y - X Y_v}{Y^2} = \frac{X_v - F Y_v}{Y},$$

$$F_{uu} = \frac{(X_{uu} - F_u Y_u - F Y_{uu}) Y - (X_u - F Y_u) Y_u}{Y^2} = \frac{X_{uu} - 2 F_u Y_u - F Y_{uu}}{Y},$$

$$F_{vv} = \frac{(X_{vv} - F_v Y_v - F Y_{vv}) Y - (X_v - F Y_v) Y_v}{Y^2} = \frac{X_{vv} - 2 F_v Y_v - F Y_{vv}}{Y},$$

$$F_{uv} = \frac{(X_{uv} - F_v Y_u - F Y_{uv}) Y - (X_u - F Y_u) Y_v}{Y^2} = \frac{X_{uv} - F_v Y_u - F_u Y_v - F Y_{uv}}{Y}$$

(5.31)

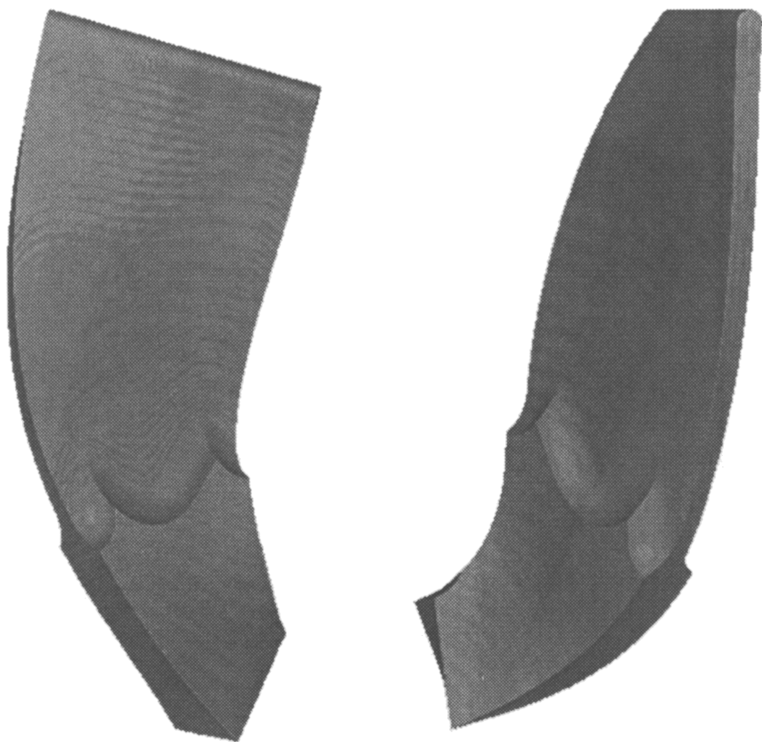


图 5.33 在 Unigraphics18 中应用 SFC 刀具路径的虚拟切削

节点 a 处的导数是通过用 u_a 替换 u 、 v_a 替换 v 而得到的, 由式 (5.32) 给出:

$$\begin{aligned}
 Y_u &= v_c - v_b, Y_v = u_b - u_c, Y_{uu} = 0, Y_{vv} = 0, Y_{uv} = 0, \\
 X_u &= 2 \frac{[1 + (f_u)_k^2](u_a - u_b) + (f_u)_k(f_v)_k(v_a - v_b)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_v &= 2 \frac{[1 + (f_v)_k^2](v_a - v_b) + (f_u)_k(f_v)_k(u_a - u_b)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uu} &= 2 \frac{1 + (f_u)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, X_{vv} = 2 \frac{1 + (f_v)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uv} &= 2 \frac{(f_u)_k(f_v)_k}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

节点 b 处的导数是通过用 u_b 替换 u 、 v_b 替换 v 而得到的, 由式 (5.33) 给出:

$$\begin{aligned}
 Y_u &= v_a - v_c, Y_v = u_c - u_a, Y_{uu} = 0, Y_{vv} = 0, Y_{uv} = 0, \\
 X_u &= 2 \frac{[1 + (f_u)_k^2](2u_b - u_a - u_c) + (f_u)_k(f_v)_k(2v_b - v_a - v_c)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_v &= 2 \frac{[1 + (f_v)_k^2](2v_b - v_a - v_c) + (f_u)_k(f_v)_k(2u_b - u_a - u_c)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uu} &= 4 \frac{1 + (f_u)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, X_{vv} = 4 \frac{1 + (f_v)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uv} &= 4 \frac{(f_u)_k(f_v)_k}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

最后, 节点 c 处的导数是通过用 u_c 替换 u 、 v_c 替换 v 而得到的, 由式 (5.34) 给出:

$$\begin{aligned}
 Y_u &= v_b - v_a, Y_v = u_a - u_b, Y_{uu} = 0, Y_{vv} = 0, Y_{uv} = 0, \\
 X_u &= 2 \frac{[1 + (f_u)_k^2](u_c - u_b) + (f_u)_k(f_v)_k(v_c - v_b)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_v &= 2 \frac{[1 + (f_v)_k^2](v_c - v_b) + (f_u)_k(f_v)_k(u_c - u_b)}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uu} &= 2 \frac{1 + (f_u)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, X_{vv} = 2 \frac{1 + (f_v)_k^2}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}, \\
 X_{uv} &= 2 \frac{(f_u)_k(f_v)_k}{[1 + (f_u)_k^2 + (f_v)_k^2]^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

对于单元号码 N , $N \in \{1, \dots, N_e\}$, 三角形号码 k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, F 的值及其关于 u_a 和 v_a 的导数是用式 (5.31) 和式 (5.32) 计算的, 计算值会加到适当的数组元素中:

$$\begin{aligned}
I_{new}^h &= I_{old}^h + F, \\
[R_u]_{n,new} &= [R_u]_{n,old} + F_u, \\
[R_v]_{n,new} &= [R_v]_{n,old} + F_v, \\
[R_{uu}]_{n,new} &= [R_{uu}]_{n,old} + F_{uu}, \\
[R_{vv}]_{n,new} &= [R_{vv}]_{n,old} + F_{vv}, \\
[R_{uv}]_{n,new} &= [R_{uv}]_{n,old} + F_{uv}
\end{aligned}$$

其中, $n = C_o(N, k - 1)$ 。

同样的, 对于节点 b , 在局部和全局节点号码之间的对应关系由 $n = C_o(N, k)$ 给出, 则 F 的值及其关于 u_b 和 v_b 导数是用式 (5.31) 和式 (5.33) 计算的。最后, 对于节点 c , 在局部和全局节点号码之间的对应关系由 $n = C_o(N, k + 1)$ 给出, F 的值及其关于 u_c 和 v_c 的导数是用式 (5.31) 和式 (5.34) 计算的。

参 考 文 献

- [1] Amazigo, J. C. and Rubinfeld, L. A. 1980. *Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- [2] Anderson, D. and Ray, M. 1982. The use of solution adaptive grids in solving partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 10-11:317-338.
- [3] Anderson, D. A. 1987. Equidistribution schemes, poisson generators, and adaptive grids. *Applied Mathematics and Computation*, 24(3):211-227.
- [4] Arina, R. and Tarditi, S. 1994. Orthogonal block structured surface grids. In Baines, M. J. and Morton, K. W., editors, *Numerical Methods for Fluid Dynamics IV*, pages 291-298. Oxford University Press.
- [5] Babuska, I. and Rheinboldt, W. 1979. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597-1615.
- [6] Bahvalov, S. 1969. On optimization of methods for solving boundary problems with boundary layers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4):841-859.
- [7] Baker, T. 1989. Developments and trends in three-dimensional mesh generation. *Applied Numerical Mathematics*, 5(4):275-304.

- [8] Berger, M. and Oliger, J. 1984. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53(3):484–512.
- [9] Bieterman, M. B. and Sandstrom, D. R. 2003. A curvilinear tool-path method for pocket machining. *Journal of Materials Processing Technology*, 125(4):709–715.
- [10] Blacker, T. and R.J., M. 1993. Seams and wedges in plastering: A 3D hexahedral mesh generation algorithm. *Engineering with Computers*, 2(9):83–93.
- [11] Blacker, T. and Stephenson, M. B. 1991. Paving : a new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(4):811–847.
- [12] Boender, E. 1994. Reliable Delaunay-based mesh generation and mesh improvement. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10(10):773–783.
- [13] Brackbill, J. U. 1993. An adaptive grid with directional control. *Journal of Computational Physics*, 108(1):38–50.
- [14] Brackbill, J. U., B., K. D., and M., R. H. 1988. FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. *Computational Physics Communications*, 48(1):25–38.
- [15] Brackbill, J. U. and Saltzman, J. S. 1982. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 46(3):342–368.
- [16] Carey, G. 1997. *Computational Grids: Generations, Adaptation & Solution Strategies*. Taylor & Francis, London.
- [17] Carey, G. and Dinh, H. 1985. Grading function and mesh redistribution. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 22(3):1028–1040.
- [18] Charakhch'yan, A. 1994. Compound difference schemes for time-dependent equations on non-uniform meshes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10(2):93–110.
- [19] Charakhch'yan, A. A. and Ivanenko, S. A. 1997. A variational form of the Winslow grid generator. *Journal of Computational Physics*, 136(2):385–398.
- [20] Dannenhoffer, J. 1988. A comparison of two adaptive grid techniques. In *Numerical Grid Generation in Computational. Fluid Mechanics '88*, pages 319–328.
- [21] Dar'in, N. and Majukin, V. . 1988. On one approach to adaptive grid generation in time-dependent problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 28(3):454–460.
- [22] De Boor, C. 1974. Good approximation by splines with variable knots II. In Watson, G. A., editor, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 363, pages 12–20. Springer-Verlag, Berlin.
- [23] Degtyarev, L. and Ivanova, T. 1993. Adaptive grid method in one-dimensional nonstationary convection - diffusion problems. *Differential Equations*, 29(7):1179–1192.

- [24] Diaz, A., Kikuchi, N., and Taylor, J. 1983. A method of grid optimization for finite element method. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41(1):29–45.
- [25] Dvinsky, A. 1991. Adaptive grid generation from harmonic maps on riemanian manifolds. *Journal of Computational Physics*, 95(3):450–476.
- [26] Eells, J. and Sampson, J. 1964. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 86(1):109–160.
- [27] Eiseman, P. 1987. Adaptive grid generation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 64(1-3):321–37664.
- [28] Emelyanov, K. 1994. Optimal grid generation and its application in singular problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 34(6):936–943.
- [29] Farrashkhalvat, M. and Miles, J. 2003. *Basic Structured Grid Generation: With an Introduction to Unstructured Grid Generation*. Elsevier.
- [30] Frey, W. and Field, D. 1991. Mesh relaxation: A new technique for improving triangulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(6):1121–1133.
- [31] George, P. 1991. *Automatic Mesh Generation: Application to Finite Element Methods*. John Wiley and Sons, New York.
- [32] Godunov, S. and Prokopov, G. 1967. On computing conformal mappings and finite-difference grid generation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(5):1031–1059.
- [33] Godunov, S. and Prokopov, G. 1972. The use of moving meshes in gas-dynamics calculations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 12(2):182–194.
- [34] Golias, N. and Tsiboukis, T. 1994. An approach to refining three-dimensional tetrahedral meshes based on Delauney transformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:793–812.
- [35] Grebennikov, A. 1976. On the choice of nodes in spline approximation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 16(1):219–223.
- [36] Ivanenko, S. 1995. Adaptive-harmonic grid generation and its application for numerical solution of the problems with boundary and interior layers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 35(10):1203–1220.
- [37] Ivanenko, S. A. 1988. Generation of non-degenerate meshes. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 28(5):141–146.
- [38] Ivanenko, S. A. 1993. Adaptive grids and grids on surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 33(9):1179–1193.
- [39] Ivanenko, S. A. 1999. Harmonic mappings. In *Handbook of Grid Generation*, chapter 8, pages 8(1–43). CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA.
- [40] Jaquotte, O.-P. 1988. A mechanical model for a new grid generation method in computational fluid dynamics. *Computational Mathematics and Applied Mechanics in Engineering*, 66:323–338.
- [41] Jeong, J. and Kim, K. 1999. Generation of tool paths for machining free-

- form pockets with islands using distance maps. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15(5):311–316.
- [42] J.F., T., Soni, B., and Weatherill, N. 1999. Handbook of grid generation. *CRC Press*.
 - [43] Jiang, B. and Carey, G. 1987. Adaptive refinement for least squares finite elements with element-by-element conjugate gradient solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(3):569–580.
 - [44] Kennon, S. and Anderson, D. 1988. Unstructured grid adaption for non-convex domains. In *Proceedings of the Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, pages 599–609.
 - [45] Kennon, S. and Dulikravich, G. 1986. Generation of computational grids using optimization. *AIAA Journal*, 24(7):1069–1073.
 - [46] Liseikin, V. 2006. *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. Springer,, Berlin, New York.
 - [47] Liseikin, V. D. 1999. *Grid Generation Methods*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
 - [48] Lo, C. C. 1999. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 31(9):557–566.
 - [49] Makhanov, S. S. 1999. An application of variational grid generation techniques to the tool-path optimization of industrial milling robots. *Journal of Materials Processing Technology*, 39(9):1524–1535.
 - [50] Makhanov, S. S., Batanov, D., Bohez, E., Sonthipaumpoon, K., Anotaipaiboon, W., and Tabucanon, M. 2002. On the tool-path optimization of a milling robot. *Computers & Industrial Engineering*, 43(3):455–472.
 - [51] Makhanov, S. S. and Ivanenko, S. A. 2003. Grid generation as applied to optimize cutting operations of the five-axis milling machine. *Applied Numerical Mathematics*, 46(3-4):331–351.
 - [52] Muller, K. 1981. Moving finite elements II. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18(6):1033–1057.
 - [53] Muller, K. and Muller, R. 1981. Moving finite elements I. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18(6):1019–1032.
 - [54] Nakahashi, K. and Deiwert, G. S. 1986. Three-dimensional adaptive grid method. *AIAA Journal*, 24(6):948–945.
 - [55] Oden, J., Demkowicz, L., Strouboulis, T., and Devlow, P. 1986. Adaptive methods for problems in solid and fluid mechanics. In Babuska, I., editor, *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, pages 249 – 280. John Willey.
 - [56] Pardhanani, A. and Carey, G. 1988. Optimization of computational grids. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 4(2):95–117.
 - [57] P.D., T. 1982. Composite three dimensional grids generated by elliptic systems. *AIAA Journal*, 20(9):1195–1202.
 - [58] Pereira, V. and Sewell, E. 1975. Mesh selection for discrete solutions of boundary value problems in ordinary differential equations. *Numerical Mathematics*, 23(3):261–268.

- [59] Prokopov, G. 1970. Construction of orthogonal difference grids from conformal mappings. In *Proceedings N45, Keldysh Institute of Applied Mathematics*, Moscow (in Russian).
- [60] Rank, E. and Babushka, I. 1987. An expert system for the optimal mesh design in hp-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(11):2087–2106.
- [61] Roache, P. and Steinberg, S. 1985. A new approach to grid generation using a variational formulation. In *Proceeding of AIAA 7-th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 360–370.
- [62] Russel, R.D. and Christiansen, J. 1978. Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 15(1):59–80.
- [63] Ryskin, G. and L.G., L. 1983. Orthogonal mapping. *Journal of Computational Physics*, 50(1):71–100.
- [64] Saltzman, J. 1986. Variational methods for generating meshes on surfaces. *Journal of Computational Physics*, 63(1):1–19.
- [65] Samareh-Abolhassani, J. and Stewart, J. 1994. Surface grid generation in a parameter space. *Journal of Computational Physics*, 113(1):112–121.
- [66] Serezhnikova, T., Sidorov, A., and Ushakova, O. 1989. On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications. *Soviet Journal Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 4(2):137–155.
- [67] Sidorov, A. 1966. On one algorithm for computing optimal difference grids. In *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, pages 147–151.
- [68] Soni, B. 1993. Elliptic grid generation system: Control functions revisited - I. *Applied Mathematics and Computation*, 59:151–163.
- [69] Spitaleri, R. and Micacchi, V. 1998. A multiblock multigrid generation method for complex simulations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 46(1):1–12.
- [70] Steger, J. and Chaussee, D. 1980. Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1(4):431–437.
- [71] Steinberg, S. 1994. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press.
- [72] Thompson, J. 1984. Grid generation techniques in computational fluid dynamics. *AIAA Journal*, 22(11):1505–1523.
- [73] Thompson, J., Warsi, Z., and Mastin, C. 1985. *Numerical grid generation: Foundations and Applications*. North-Holland.
- [74] Thompson, J. F., editor 1982. *Numerical Grid Generation*. North-Holland.
- [75] Tikhonov, A. and Gorbunov, A. 1969. Error estimates for the Runge-Kutta methods and choice of optimal grids. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(2):232–242.
- [76] Tu, Y. and Thompson, J. 1991. Three-dimensional solution - adaptive grid generation on composite configurations. *AIAA Journal*, 29(12):2025–2026.

- [77] Tucker, A. B., editor 1997. *The Computer Science and Engineering Handbook*. CRC Press.
- [78] Vabistchevitch, P. 1989. Adaptive block grids in problems of mathematical. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(6):902–914.
- [79] White, A. J. 1979. On selection of equidistributing meshes for two-point boundary-value problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 16(3):472–502.
- [80] White, A. J. 1982. On the numerical solution of initial/boundary value problems in one space dimension. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 19(4):683–697.
- [81] Winslow, A. M. 1966. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh. *Journal of Computational Physics*, 1(2):149–172.

第 6 章 旋 转 最 优

6.1 引言

前面章节已概括介绍优化方法，本章节主要分析一种特殊且重要的机床旋转序列问题。有许多集中于切削刀具定位的研究，详见第 1 章介绍。实际上定位完成前的状态也会影响定位的精确度。换句话说，运动学误差不仅仅取决于表面性质和刀具方向，与上个旋转状态也有关联。因为刀具在驻点附近旋转时可能产生突然变化，旋转“历史”在理想曲面的驻点附近变得特别重要。然而大型 CAD/CAM 商业系统如 Unigraphics、EdgeCam、Vericut 等均没有此类分析，仅有少量研究报告曾提及此主题。

前面已经叙述过一个表面驻点不是最大值，就是最小值，或是一个鞍点。从数学角度上，如果 (u_s, v_s) 是驻点，那么

$$\left. \frac{\partial S}{\partial u} \right|_{(u_s, v_s)} = \left. \frac{\partial S}{\partial v} \right|_{(u_s, v_s)} = 0 \quad (6.1)$$

Jung 等人^[4]分析了旋转的次序，以最小化在表面一阶导数不连续中倒相的步数（角落等），避免异常的方法已由 Affouard 等^[1]提出。基于全局最优化的关于机床可行性旋转的算法在文献 [11] 中被提出，在文献 [9] 中得到发展。

最优化基于存在旋转角度的多重组合，以确定需要的方位。然而，能如此阐明寻找一组旋转角度排序的问题，必然能减小成本函数（例如运动学误差）。此问题能用最短路径优化法解决，根据发现于运动学方程式的可行性旋转，成本作用可由运动学误差或是角度

变化来表现。最优化增加机床的加工精度，是粗切削时最合适的方案。

最短路径过程是应用于整套轨迹或工件内部最合适过切的情况。最近，此算法产生了一种有趣的解决方案，即增加底切可以缩小过度切削。

采用小的空间和角度步长时，对光滑表面进行精细切削可能不能说明靠近驻点的有害影响，然而大梯度的粗切削可能会产生相当大的误差。

这些大的梯度导致剧烈的角度跳跃，从而使机床产生类似环形的刀具轨迹。刀具沿着这些轨迹移动可能会破坏工件，甚至会导致与机床零件的碰撞。

我们介绍的例子说明了对试验零件表面 S_1 （见图 6.1）在 HERMLE UWF902H 上的一个切削过程。图 6.2 所示为加工表面上驻点附近的一条曲线时产生的一个大环形回路。毫无疑问，刀具路径的线性化不是总能适用。采取线性的轨迹甚至是不安全的，因为沿着真实的环

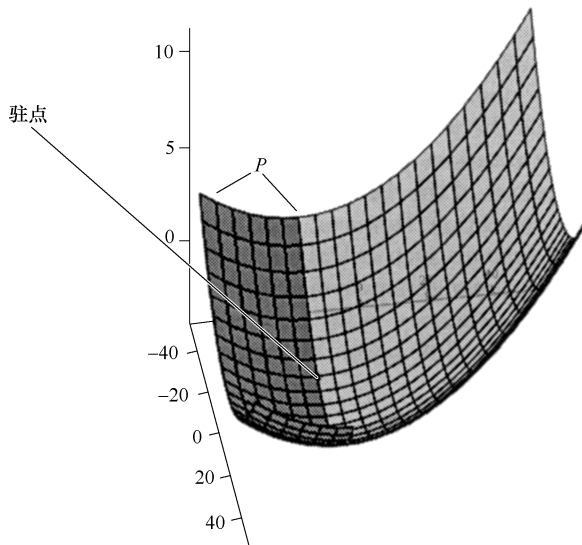
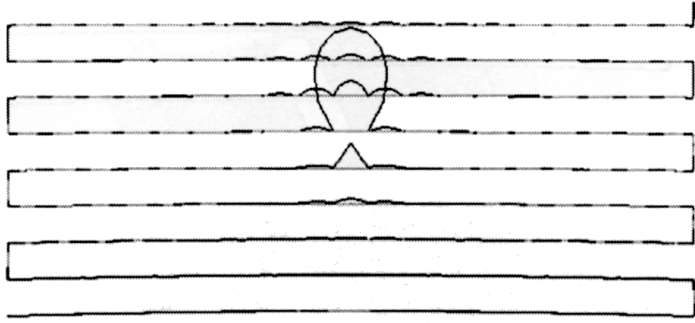
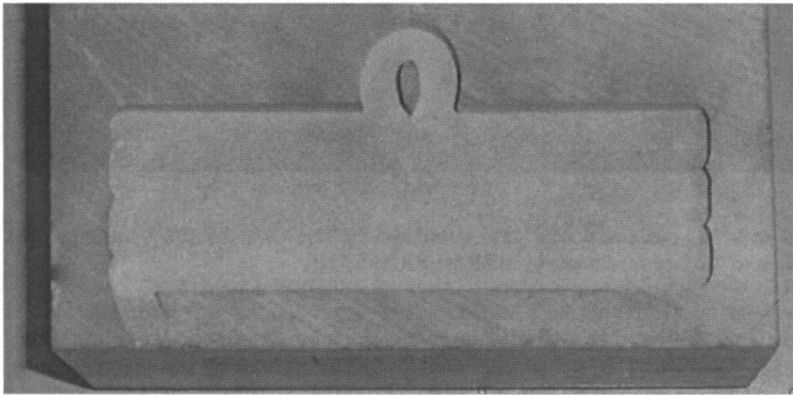


图 6.1 试验零件表面 S_1 (P 是加工区域)

形轨迹移动刀具可能会损坏工件，甚至造成与机床零件的碰撞。



(a)



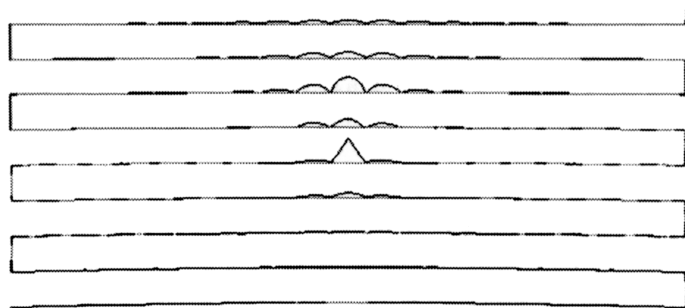
(b)

图 6.2 加工表面上驻点附近的一条曲线时产生的一个大回路
(a) 虚拟机床模拟的常规刀具路径 (b) 在 HERMLE UWF902H 上加工的表面

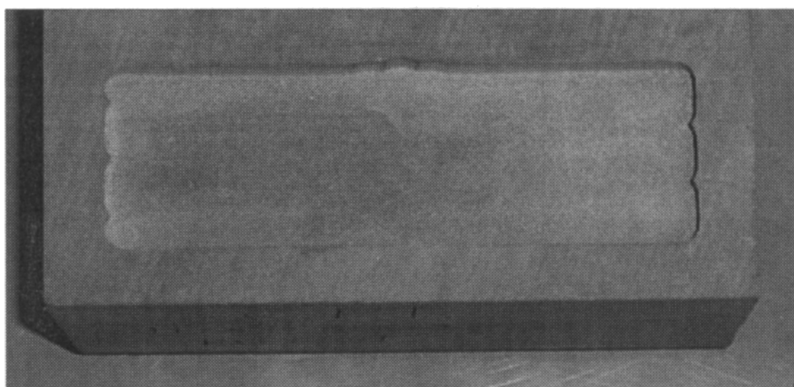
图 6.3 所示为改变旋转次序会形成许多较小的回路，从而大大减少运动学误差。第二个例子说明了一个类似的轨迹，它是在 MAHO 600E 上加工属于表面 S_2 (见图 6.4) 的一条曲线。

图 6.5 所示为非线性化的刀具路径，实际上加工产生回路是由大的角步长引起的。此类轨迹可以通过调整旋转角度修复 (见图 6.6)，从而使运动学误差最小化。

在本章中，我们将推出一种点插入算法，它可以理解为在一个运动学误差大的区域的角插值方案。通过创建一个额外的位置，使网格



(a)



(b)

图 6.3 改变旋转次序形成许多较小的回路

(a) 通过虚拟铣床上模拟的优化刀具路径 (b) 在 HERMLE UWF902H 上加工的优化表面

点均匀分布在角空间。

这个过程对小空间步长的高速铣削特别有利。在这种情况下，由于伺服更新效率的延迟，进一步减少步长，引起加工时间的大幅度增加。

最后，特定机床零部件总是有角速度限制。结果，有许多回转次数多的短刀具路径要比回转次数少^[2,3]的长刀具路径更耗费时间。如果控制器探测到的最大角速度超过了限制，那么控制器就会发出信息减小角速度，从而增加加工时间。角度修正算法使总的角度变化最小化，以此减少角速度超速事件的概率。

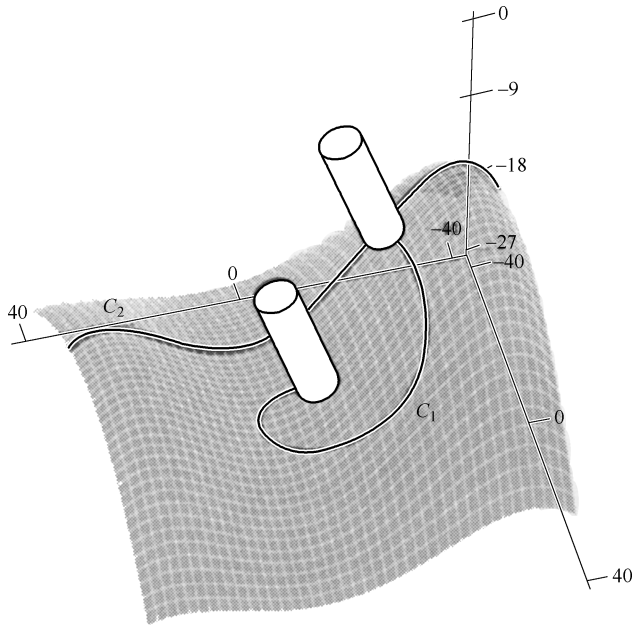
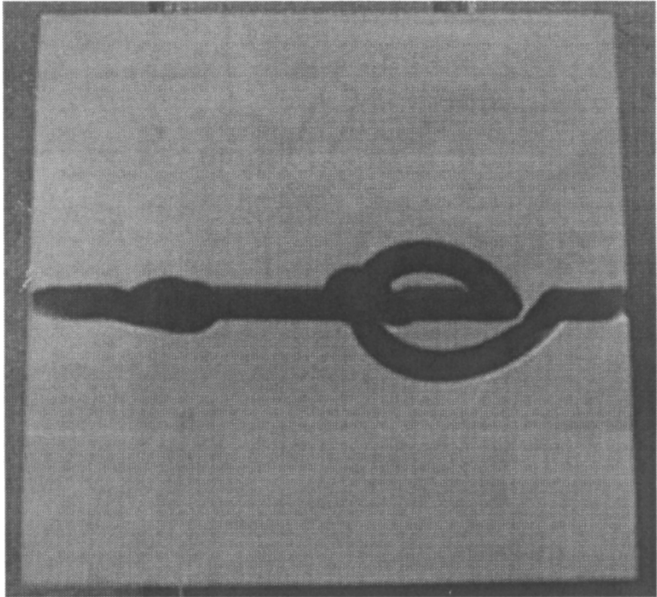


图 6.4 在工件坐标系中由于旋转得到非线性特征的刀具
路径 (C_1) 和试验切削 (C_2)



(a)

图 6.5 非线性化的刀具路径

(a) 大梯度旋转角度引起的环状轨迹损坏工件

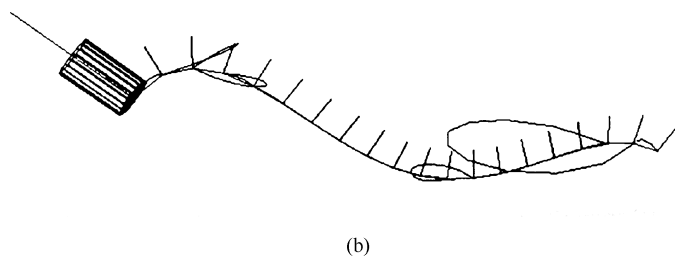


图 6.5 非线性化的刀具路径 (续)

(b) 虚拟铣床模拟的轨迹

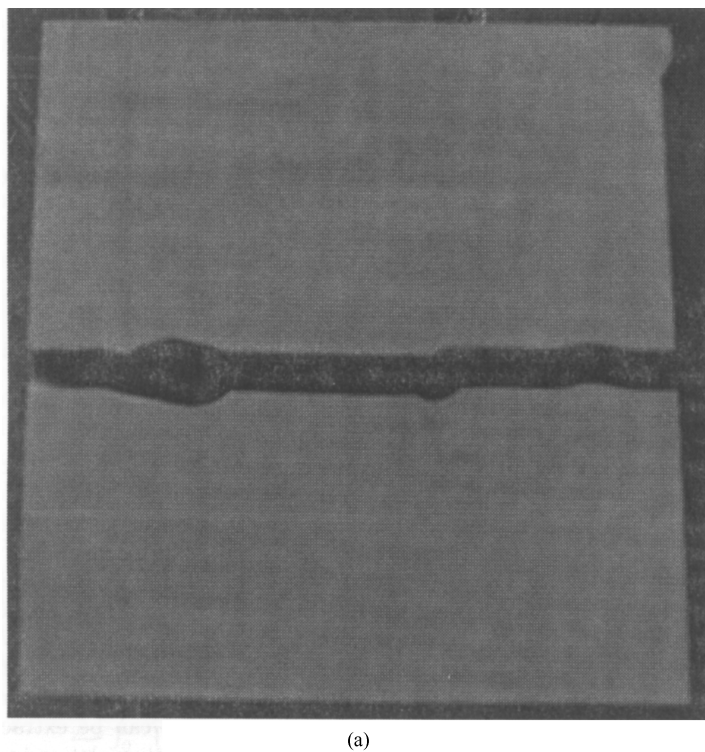


图 6.6 通过调整旋转角度修复图 6.5 中的刀具轨迹线

(a) “修复”的轨迹

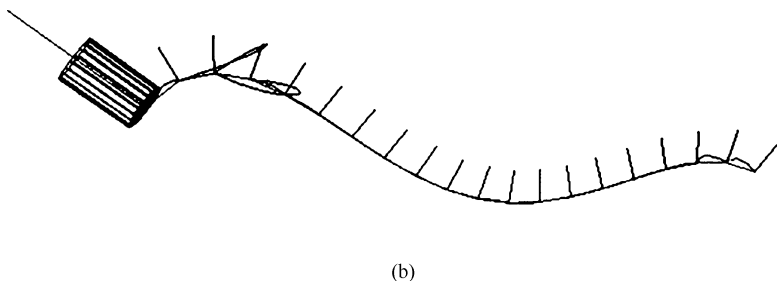


图 6.6 通过调整旋转角度修复图 6.5 中的刀具轨迹线 (续)

(b) 虚拟铣床模拟的修复的轨迹

6.2 运动学误差和角度变化

假设 $W_{p,p+1}^D(t) \in S(u, v)$ 是 W_p 和 W_{p+1} 之间的一条曲线。它反映了一个在 Π_p 和 Π_{p+1} 之间的理想刀具轨迹 (见 3.4 节)。我们定义 $W_{p,p+1}^D(t)$ 偏离实际刀具轨迹 $W_{p,p+1}(t)$ 的总和为总误差。总误差通过式 (6.2) 得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_p \left[\int_0^1 |W_{p,p+1}^D(t) - W_{p,p+1}(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_p \left\{ \int_0^1 [(x_{p,p+1}^D(t) - x_{p,p+1}(t))^2 + (y_{p,p+1}^D(t) - y_{p,p+1}(t))^2 \right. \\ &\quad \left. + (z_{p,p+1}^D(t) - z_{p,p+1}(t))^2] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

总误差式 (6.2) 近似等于:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_p \frac{1}{L_p} \left\{ \sum_{l_p}^{L_p} [(x_{p,p+1,l_p}^D - x_{p,p+1,l_p})^2 + (y_{p,p+1,l_p}^D - y_{p,p+1,l_p})^2 \right. \\ &\quad \left. + (z_{p,p+1,l_p}^D - z_{p,p+1,l_p})^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

其中, L_p 是 W_p 和 W_{p+1} 之间的采样点。

注意, 上述定义可以简化, 即将理想运动轨迹 $W_{p,p+1}^D$ 由给出的线性运动轨迹 $W_{p,p+1}^L(t) = tW_{p+1} + (1-t)W_p$ 更换, 使用此选项时应谨慎。

相对于机床坐标系 M 相反, 在工件坐标中 W 中的运动轨迹不是线性的。但是, 我们可以将线性轨迹作为参考, 并指出 $\varepsilon \equiv \|W^D - W\| \leq \|W^D - W^L\| + \|W^L - W\|$ 。这里, L 是 S 的分段线性逼近。因此, 当这些点无限接近时, 误差近似等于 $\varepsilon \approx \varepsilon_L = \|W^L - W\|$ 。请注意, 如果刀具的方向在切割过程中是固定的, 则 $\varepsilon_L = 0$ 。换句话说, 三轴模式导致的 $\varepsilon_L = 0$, 因为所有的轨迹成为线性的。所以, 关于 ε_L 的最小化, ε_L 的方向必须与刀具方向一致。最后, 线性化是一个最简单方法, 甚至不知道实际表面也可以使用, 例如一个给定的 G 代码。事实上, 理论轨迹 W^D 可以通过多种方式从表面提取, 例如用在参数空间插值、测地曲线等。但本章中的结果是有效的, 与获得 W^D 的方法无关。最后, 由线性逼近所引起的误差取决于控制点间的最大距离 h , $h = k \left\| \frac{d^2 W^D}{dt^2} \right\|_{Ch^2}$, k 为常数 (见例子^[10])。

现在介绍总角度的变化。考虑 W_p 和 W_{p+1} 两个定位点。这两个点位之间相应的运动学误差被定义为

$$\varepsilon_{p,p+1} \equiv \left\{ \int_0^1 [W_{p,p+1}^D(t) - W_{p,p+1}(t)]^{2d} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

显然, $\varepsilon_{p,p+1} \equiv \varepsilon(\Delta a_{p,p+1}, \Delta b_{p,p+1}, \Delta l_{p,p+1})$, 这里 $\Delta l_{p,p+1} = \|W_{p,p+1}^D - W_{p,p+1}\|_E$ 在工件坐标系中是空间步长。此外, $\Delta a_{p,p+1} \equiv a_{p,p+1}(\Delta l_{p,p+1}) = a_{p,p+1} - a_p$ 和 $\Delta b_{p,p+1} \equiv b_{p,p+1}(\Delta l_{p,p+1}) = b_{p+1} - b_p$ 是角步长。加工试验表明, 角步长往往比空间步长更重要一些。特别是在粗切削时, 减小角步长比减小空间步长更能大幅度地减小误差。角度在 W_p 和 W_{p+1} 两个位置之间的变化为

$$c_{p,p+1} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial a_{p,p+1}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial b_{p,p+1}}{\partial t} \right)^2} dt \quad (6.5)$$

假设 $a_{p,p+1}$ 和 $b_{p,p+1}$ 线性变化, 导致 $c_{p,p+1} = \sqrt{(\Delta a_{p,p+1})^2 + (\Delta b_{p,p+1})^2}$ 。整个切削轨迹内角度总变化可以简化为

$$c = \sum_p c_{p,p+1} = \sum_p \sqrt{(\Delta a_{p,p+1})^2 + (\Delta b_{p,p+1})^2} \quad (6.6)$$

请注意, 往往存在 CL 点的邻域, 角度的变化速度比其他区域更快。无论 $\varepsilon_{p,p+1} \approx O((\Delta a_{p,p+1})^{m_1})$ 还是 $\varepsilon_{p,p+1} \approx O((\Delta b_{p,p+1})^{m_2})$, m_1 和 m_2 取决于表面。在这种情况下, 总角度变化最小化能产生良好的效果。

最后, 在粗切削的情况下往往需要区分过度切削和底切误差。当太多的材料从零件上被移除, 一般认为是被挖掉或过度切削。底切是没有足够的材料被切除的情况。为方便起见, 我们定义的底切和过度切削的误差如下:

$$\varepsilon_U = \sum_p \int_0^1 \begin{matrix} (W_{p,p+1}^D - W_{p,p+1})^2 & z_{p,p+1}^D(t) \leq z_{p,p+1}(t) \\ 0 & \text{其余} \end{matrix} dt \quad (6.7)$$

$$\varepsilon_O = \sum_p \int_0^1 \begin{matrix} (W_{p,p+1}^D - W_{p,p+1})^2 & z_{p,p+1}^D(t) > z_{p,p+1}(t) \\ 0 & \text{其余} \end{matrix} dt \quad (6.8)$$

底切和过切相应的角度变化定义如下;

$$c_U = \sum_p c_{U,p,p+1} \quad (6.9)$$

$$c_O = \sum_p c_{O,p,p+1} \quad (6.10)$$

其中

$$c_{U,p,p+1} = \sqrt{(\Delta a_{p,p+1})^2 + (\Delta b_{p,p+1})^2} \Delta_{p,p+1}^U,$$

$$c_{O,p,p+1} = \sqrt{(\Delta a_{p,p+1})^2 + (\Delta b_{p,p+1})^2} \Delta_{p,p+1}^O,$$

$$\Delta_{p,p+1}^U = \int_0^1 \begin{cases} 1 & z_{p,p+1}^D(t) > z_{p,p+1}(t) \\ 0 & \text{其余} \end{cases} dt$$

显然, $\varepsilon = \varepsilon_O + \varepsilon_U$ 并且 $c = c_O + c_U$, 因为过切是不可补救的, 所以减少过切误差比减少底切误差甚至是总误差更重要。

6.3 优化问题

我们用公式表达下面的最小化问题:

$$\min_A (w_U \varepsilon_U + w_O \varepsilon_O) \quad (6.11)$$

这里 Λ 是一个可能的旋转集合, 并且 w_U 、 w_O 加权系数分别代表过切和底切的重要性。例如当 $w_U = w_O = 1$ 时, 总运动学误差得到最小值。当 $w_U = 0$, $w_O = 1$ 时, 过切的运动学误差能达到最小值。当 $w_U = 0.1$, $w_O = 1.0$ 时, 过切和底切的运动学误差都能得到最小值, 但是过切比底切要重要 10 倍。权数可能还取决于运动学误差本身。例如可以建立以下规则: “当 $\varepsilon < \varepsilon'$ 时, $w_O = 1$, $w_U = 0$, 否则, $w_U = w_O = 1$ ”。这里, ε' 是规定的极限值。换句话说, 如果总运动学误差不太大, 我们只求过切的最小值; 但是如果运动学误差比 ε' 大很多, 那么最小值取决于总运动学误差。

如何评估集合 Λ ? 在不失一般性的前提下, 考虑在图 2.4 中所描述的配置。回想一下, 机床命令序列所规定的动作是允许刀具的五自由度同时执行。同时, 运动的目的是使刀具运行到工件坐标系中的位置或机床坐标系中 $M = (x_m, y_m, z_m)$ 的位置, 刀具方向为 $R = (a, b)$ 。依照图 2.4b 中的参考坐标系, 角度 a 是 X_1 轴和定向矢量在 $X_1 - Y_1$ 平面上 X_1 轴正方向的投影的夹角, 角度 b 是方向矢量在 $X_1 - Z_1$ 平面上的投影和 X_1 轴的正方向的夹角。

上述内容使得用定向矢量 $I = (I_x, I_y, I_z)$ 的分量表示 R 成为可能。首先, 注意在 O_4 点刀具方向矢量是 $(0, 0, 1)$ 。换句话说, 必须通过旋转使得方向矢量和 Z_4 轴共线。观察到坐标转换的结果取决于零点位置 $R = (0, 0)$, 而零点位置能够通过特殊的机床命令指定。不难看出, 在此设置中, 仅仅 $b = 0$ 是最重要的。因此, 为了不失一般性, 在图 2.4a 中可以看到: 我们指定 $R = (0, 0)$ 在倾斜工作台最右边的位置。

在图 2.4 中, 两个旋转角度 $R = (a, b)$ 和刀具的方向矢量 I 的等式关系为

$$\begin{aligned} I_x &= \cos(a) \cos(b) \\ I_y &= \sin(a) \cos(b) \\ I_z &= -\sin(b) \end{aligned} \tag{6.12}$$

考虑了上述方程组的解为

$$a_{base} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) & I_x > 0 \text{ 且 } I_y > 0 \\ \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + \pi & I_x < 0 \\ \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) + 2\pi & \text{其余} \end{cases} \quad (6.13)$$

$$b_{base} = -\sin I_z$$

给定 a_{base} 和 b_{base} 值, 不难建立 4 个解 (见图 6.7):

$$\Lambda = \{ (a_{base}, b_{base}), (a_{base} - 2\pi, b_{base}), (a_{base} - \pi, -b_{base} - \pi), (a_{base} + \pi, -b_{base} - \pi) \} \quad (6.14)$$

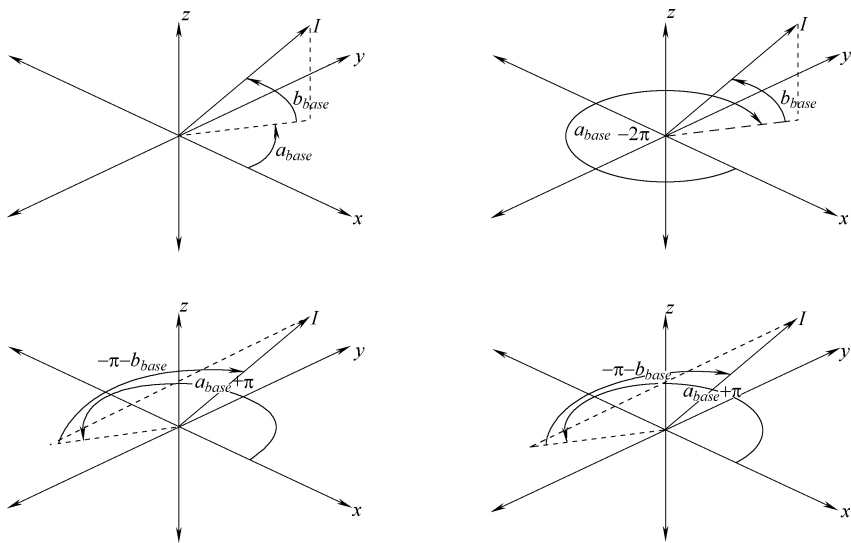


图 6.7 一套可行的旋转方案

可以为其他类型的机床建立相似的解, 例如 1-1 机床和 0-2 机床 (见第 2 章)。

请注意, 一些解取决于旋转自由度 d 的数量 $O(2^d)$ 。例如对于一个 6 轴机器, 我们会有 8 个解, 然而由于机床的限制, 一些解不能实现。

此外，这个问题可以通过最短路径优化。相应的图通过以4个图节点 Λ_p 确定的每个位置 Π_p 所建立的。在节点之间的边表示了运动学误差或角度变化（见图6.8）。因此，上述最小化问题可以通过传统所谓贪婪离散算法解决。

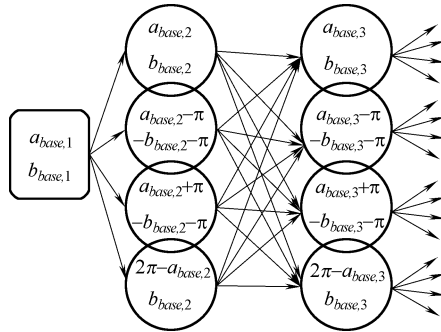


图 6.8 和可行的旋转集相对应的图

在图6.9和图6.10中可以看见上述最短路径方案。图中， l 表示沿刀具路径的坐标，4个选项代表了角空间 (a, b) 的4条轨迹。当 b 接近 $-\pi/2$ 时，轨迹接近平的。在这种情况下，考虑产生最小误差的最小路径可能改变轨迹。图6.10表明最优点只需要接近驻点，即当 b 接近 $-\pi/2$ 并且 a 是从0到 π 或从 $\pi/2$ 到 $3\pi/2$ 等的“跳跃点”。所以，在驻点的附近引入一个“优化窗口”，可以在很大程度上减少计算工作量。这个方法将在文献[8]中详细讨论。

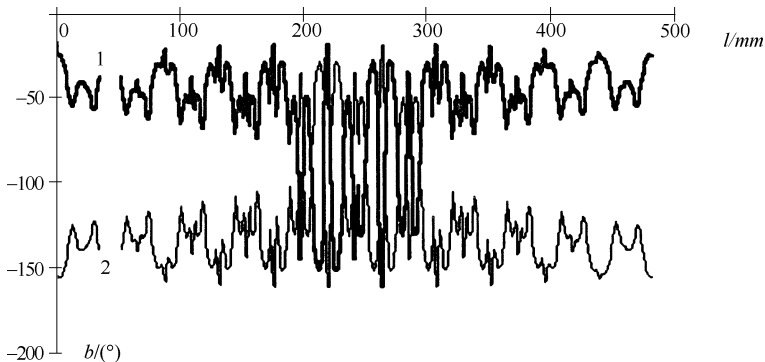


图 6.9 b_{base} 曲线、 $\pi - b_{base}$ 曲线和优化轨迹（粗线）

1— b_{base} 曲线 2— $\pi - b_{base}$ 曲线

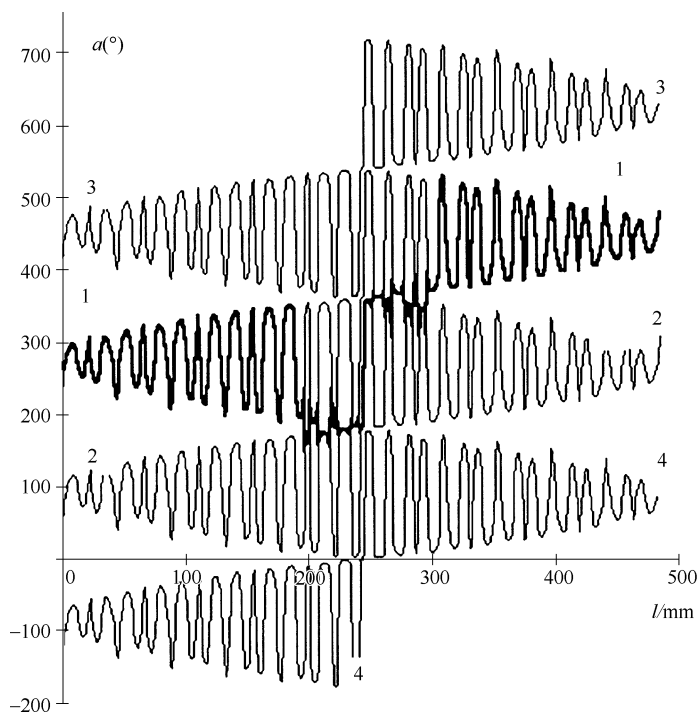


图 6.10 a_{base} 、 $a_{base} - \pi$ 、 $a_{base} + \pi$ 和 $a_{base} - 2\pi$ 轨迹和 1、2、4 构成的优化轨迹
(粗线) 组成的相应轨迹

1— a_{base} 轨迹 2— $a_{base} - \pi$ 轨迹 3— $a_{base} + \pi$ 轨迹 4— $a_{base} - 2\pi$ 轨迹

6.4 优化问题的例子和实际加工

1. 例 6.1 穿越驻点的一条轨迹——通过顶点或围绕顶点

考虑两个连续点 $\Pi_1 = (W_1, R_1)$ 和 $\Pi_2 = (W_2, R_2)$ 。假设平均空间步长 $s = |W_1 - W_2|$ 为 1mm。 $R_1 \equiv (a_1, b_1) = (0, -85^\circ)$, $R_2 \in [120, 180] \times [-60, -80]$ 。 R_1 和 R_2 表示在驻点附近旋转角度的可能组合 (见图 6.11)。

线性轨迹 T 和实际轨迹 T_{across} 、 T_{around} ，与之相应的 $R_2 \equiv (a_2, b_2) = (-10^\circ, -95^\circ)$ 和 $R_{2,base} \equiv (a_{2,base}, b_{2,base}) = (170, -85)$ 。请注意, $a_2 = a_{2,base} - 180^\circ$, $b_2 = -b_{2,base} - 180^\circ$ 。假设线性轨迹的中点和 a 旋转的

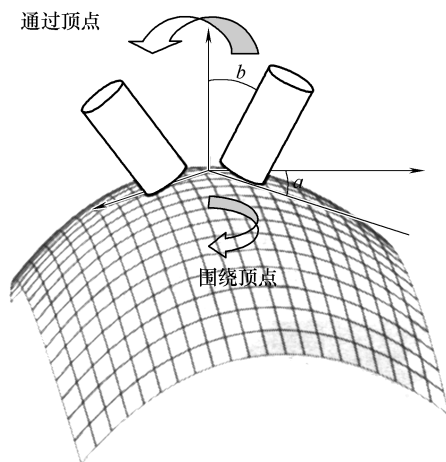


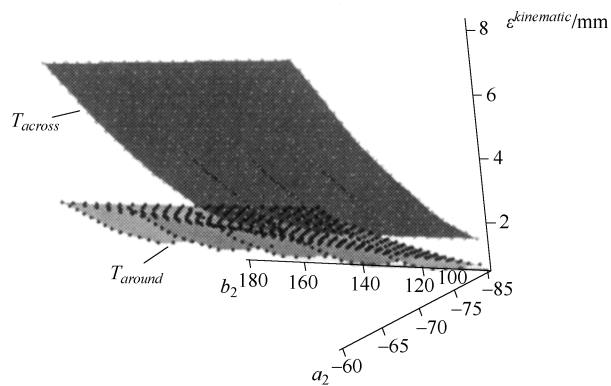
图 6.11 通过顶点或围绕顶点

中心之间的距离 r_a 为 10mm，我们可以计算出相应的轨迹和运动学误差。我们有 $\varepsilon_{across} = 1.49\text{mm}$ ， $\varepsilon_{around} = 8.89\text{mm}$ 。也就是说，通过 T_{across} 移动“通过顶点”比 T_{around} 移动“围绕顶点”更好。

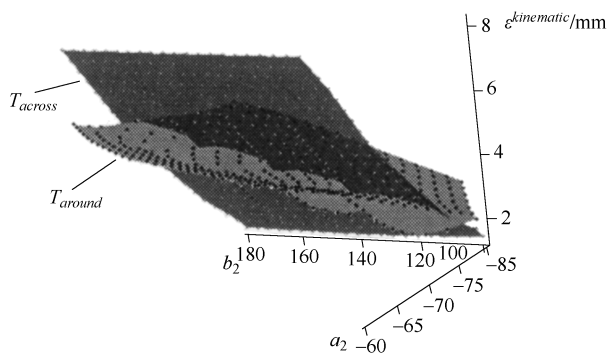
然而，情况并非总是如此。一个小 r_a 可以推导出另一个选择。例如 $r_a = 0.5\text{mm}$ ，推导出 $\varepsilon_{around} = 0.71\text{mm}$ ， $\varepsilon_{across} = 1.59\text{mm}$ 。因此，当刀位点接近 a 转轴的中心时，刀具应该移动到“围绕顶点”处。

给定一个平均空间步长，可以求出变量 r_a 的运动学误差。这个求出的值可以预先计算出刀具的运动轨迹，并且可以减少求误差的计算步骤。图 6.12 表示当 r_a 分别为 0.1mm、5mm 和 20mm 时， a_2 和 b_2 的运动学误差函数 T_{across} 和 T_{around} 。显然， $r_a = 0.1\text{mm}$ ，要求 T_{around} 适用于任何角度； $r_a = 20\text{mm}$ ，一定是 T_{across} ； $r_a = 5\text{mm}$ ，要求每一对 (a, b) 的运动学误差的值更精确。

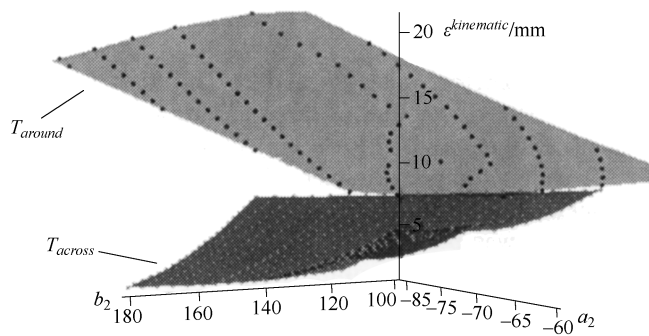
这样一种对规定了空间步长的预先计算，可以构成一种适用于 5 轴机器的优化策略。例如磨床 MAHO 600E 运动学误差的最小化，当 $s = 1\text{mm}$ 时，如果 $r_a \in [0, 5]\text{mm}$ ，使用 T_{around} ；如果 $r_a > 10\text{mm}$ ，使用 T_{across} 函数；但是当 $r_a \in (5, 10)\text{mm}$ ，不能进行预先计算，要求计算出 $\varepsilon^{kinematic}$ 的值。



(a)



(b)



(c)

图 6.12 当旋转半径 r_a 分别为 0.1mm、5mm 和 20mm 时作为 a_2 和 b_2 函数的

运动学误差 T_{across} 和 T_{around}

(a) $r_a = 0.1\text{mm}$ 时 (b) $r_a = 5\text{mm}$ 时 (c) $r_a = 20\text{mm}$ 时

2. 例 6.2 关于运动学误差的优化

我们知道,若是一条轨迹有唯一的驻点,那么由于旋转角度大的变化产生的环状路径几乎可以完全被排除。表 6.1 所示为 MAHO 600E 机床加工表面 S_1 (见图 6.1) 优化和没有优化刀具轨迹的运动学误差。

优化时没有区别 ε_U 和 ε_O (见表 6.1)。显然,总角度变化的最小化使得总运动学误差最小化。相反,当网格不是嵌套的(粗糙的网格上的点不一定属于精确网格),控制点数量的增加不一定会导致误差的减少(见 40×20 和 100×20 行)。

表 6.1 MAHO 600E 机床加工表面 S_1 优化和没有优化刀具轨迹的运动学误差

网格尺寸	最大误差值/mm/最大角度变化值/°			路径长度/mm
	未优化	优化	减少 (%)	未优化/优化
10 × 20	23.862/168.779	12.426/78.072	47.925/53.743	2825.67/2255.54
15 × 20	19.300/162.186	8.517/101.524	55.870/34.403	2500.30/2123.02
20 × 20	20.228/160.080	7.558/84.927	62.636/46.947	2367.57/2101.15
30 × 20	16.253/141.890	7.162/88.230	55.934/37.818	2183.63/2038.27
40 × 20	8.711/103.885	6.878/88.399	21.042/14.907	2069.32/2020.11
100 × 20	7.395/90.898	7.103/89.102	3.949/1.976	1916.11/1911.17
130 × 20	3.999/68.416	3.999/68.416	0.000/0.000	1876.49/1876.49

3. 例 6.3 关于过切和底切刀具路径的优化问题

当区别对待过切和底切时,优化是非常实用的。为了检测它们,把每一条轨迹 $W_{p,p+1}(t)$ 通过的一些点 t_k 进行细分。通过数值求解,我们发现每一个点 $W_{p,p+1,k} = (x_{p,p+1,k}, y_{p,p+1,k}, z_{p,p+1,k})$ 相应的参数坐标 (u_k, v_k) :

$$\begin{aligned} x_{p,p+1,k} &= x_S(u, v) \\ y_{p,p+1,k} &= y_S(u, v) \end{aligned} \quad (6.15)$$

请注意,上述方程是线性的,因此不需要一个数值解。现在,给定解 (u_k, v_k) 的值,计算每个 k 的 $z_S(u_k, v_k)$ 。接下来,我们计算每个 p 的、每个节点的角度变化 $c_{U,p,p+1}$ 和 $c_{O,p,p+1}$ 。最后,使用权数 w_O , w_U 和运用 Dijkstra 最短路径算法(见参考文献 [12])。

在 HERMLE UWF902H 机床上加工表面 S_2 。假设 $w_o = 1$, $w_U = 0$, 仅仅求过切的最小化。图 6. 13a 所示为常规的过切刀具路径（粗曲线）。图 6. 13b 所示为总误差优化后的刀具路径，从而消除位于工件右边的回路。然而，仅过切误差的刀具路程优化会产生一个完全不同的路径。在工件边缘的过切环已经被比较大但是无害的底切所代替，如图 6. 13c 所示。表 6. 2 所示为在 HERMLE UWF902H 机床上加工表面 S_2 的过切误差优化。以底切的增加和路径的长度为代价完成过切误差的减少。

表 6. 2 在 HERMLE UWF902H 上加工表面 S_2 的过切误差优化

最大误差值/mm/最大角度变化值/(°)					路径长度 (未优化/优化) /mm	角度变化 (未优化/优化) /(°)
	未优化		优化			
网格尺寸	过切	底切	过切	底切		
10×20	19.11/139.78	23.40/169.95	13.33/109.90	56.16/356.22	2929.02/2641.59	7763.87/9317.35
15×20	9.54/32.96	19.28/162.13	9.52/32.76	60.93/364.84	2676.55/3985.66	7921.93/10131.55
20×20	8.07/88.17	20.21/160.01	4.41/23.83	60.93/364.84	2486.07/5021.87	7972.65/11477.04
30×20	6.28/149.28	16.24/141.87	2.40/45.76	51.55/372.37	2253.76/3845.65	8018.01/10119.48
40×20	5.41/139.58	8.81/104.05	1.60/14.187	13.24/130.02	2117.19/2166.59	8035.95/7993.36
100×20	0.00/4.00	7.40/90.83	0.00/4.00	7.13/89.27	1924.58/1919.35	8055.03/8032.72
130×20	0.00/3.09	4.00/68.34	0.00/3.09	4.00/68.34	1880.72/1880.72	8056.50/8056.50

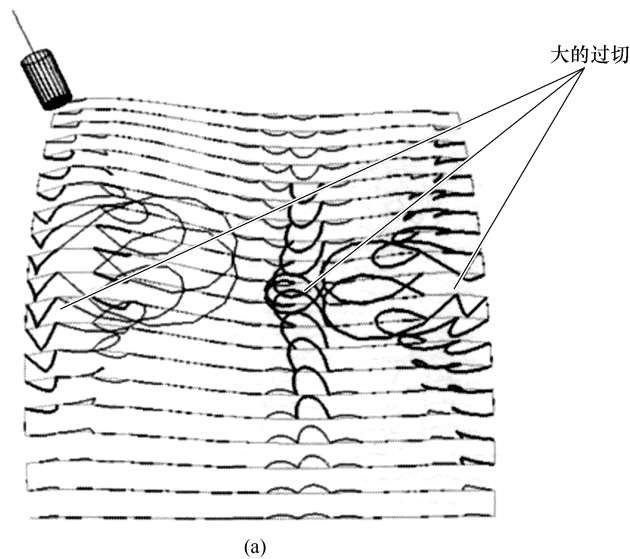


图 6. 13 在 HERMLE UWF902H 机床上 S_2 表面的加工路径优化
(a) 在 HERMLE UWF902H 机床上加工表面 S_2 的常规的过切刀具路径（粗曲线）

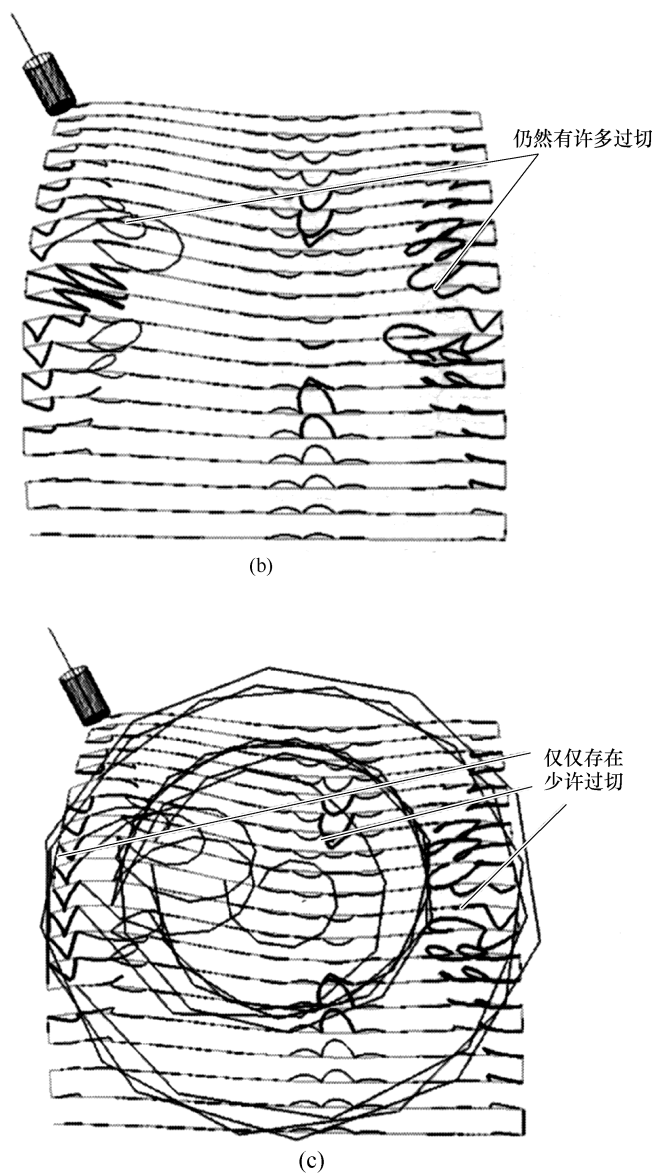


图 6.13 在 HERMLE UWF902H 机床上 S_2 表面的加工路径优化 (续)

(b) 关于总误差的刀具路径优化 (c) 关于过切误差的刀具路径优化

我们现在展示一下在 MAHO 600E 机床上优化过切的技术。本机床的配置将创建一个完全不同的轨迹。常规刀具路径和优化后的刀具路径通过 $w_o = 1$, $w_v = 1$ 显示, 如图 6.14a 和 6.14b 所示; 反之,

图 6.14c 所示为 $w_0 = 1$, $w_U = 1$ 时的关于过切误差的刀具路径优化。图 6.15a ~ 6.15c 所示为相应的加工表面。显然, 关于过切的优化可能切削一个粗糙但是合理的表面, 使得表面更加完善。而没有优化的过切可能会毁坏工件。表 6.3 所示为在 MAHO 600E 上表面 S_2 过切误差的

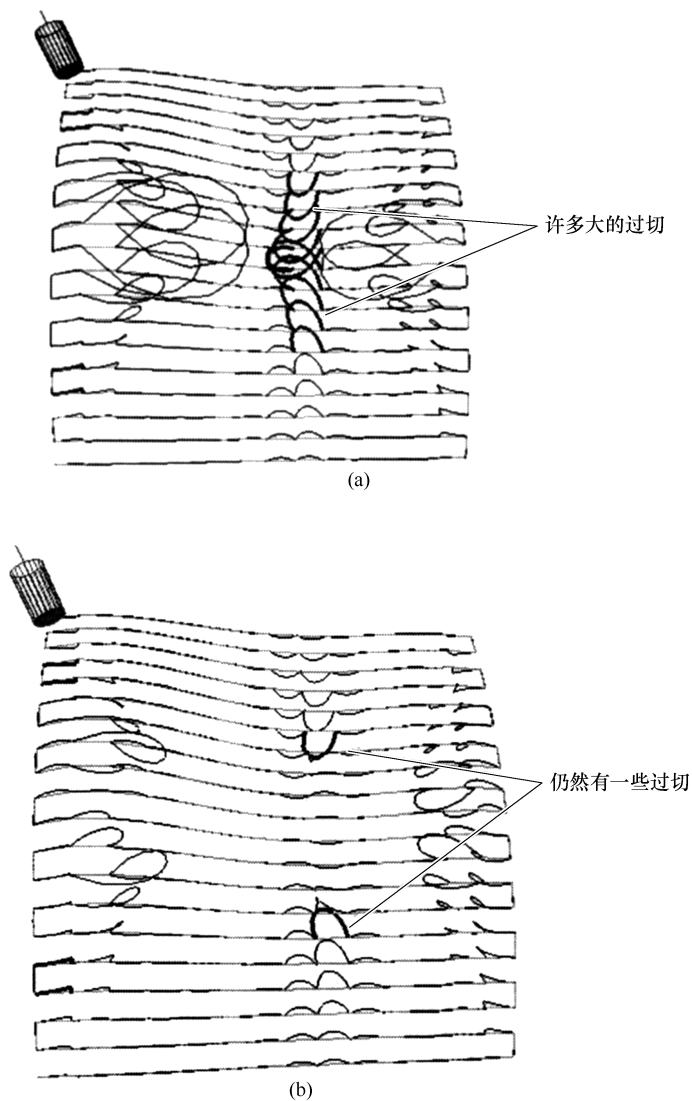


图 6.14 在 MAHO 600E 上 S_2 表面的刀具路径优化

(a) 在 MAHO 600E 上 S_2 表面的传统刀具路径 (b) 总误差优化后的刀具路径

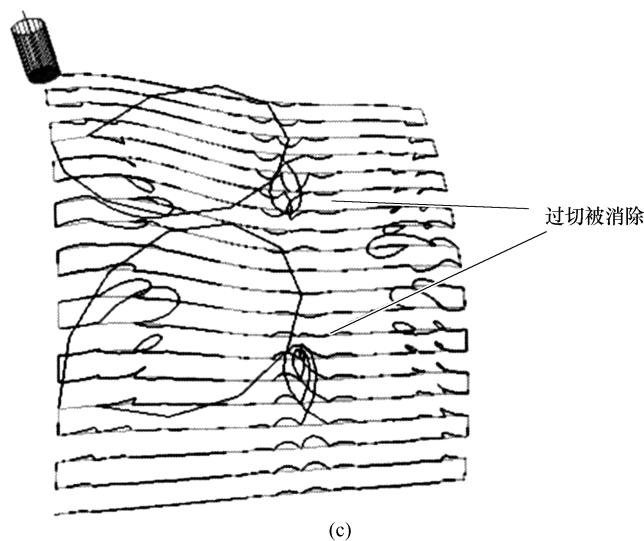


图 6.14 在 MAHO 600E 上 S_2 表面的刀具路径优化 (续)
(c) 在 MAHO 600E 上 S_2 表面的关于过切误差的刀具路径优化

优化。比较 HERMLE UWF902H 和 MAHO 600E（见表 6.2 和 6.3）可以看出，两种没有优化的切削的准确性差不多，而在 MAHO 600E 上优化后的切削效果比在 HERMLE UWF902H 上要好。

表 6.3 在 MAHO 600E 上加工表面 S_2 的过切误差优化

最大误差值/mm/最大角度变化值/（°）					路径长度 （未优化/优化） /mm	角度变化 （未优化/优化） /（°）
网格 尺寸	未 优 化		优 化			
	过切	底切	过切	底切		
10×20	8.41/169.66	23.86/170.03	1.84/28.26	38.46/157.94	2825.67/3575.11	7768.03/7867.60
15×20	7.23/164.57	19.30/162.20	1.98/40.47	32.92/159.15	2500.30/2417.30	7926.18/7339.96
20×20	6.78/159.42	20.23/160.83	0.96/26.98	7.56/87.37	2367.57/2101.14	7976.88/7148.41
30×20	6.25/149.31	16.25/141.94	0.00/12.57	7.16/89.19	2183.63/2032.20	8022.24/7848.15
40×20	5.39/139.65	8.71/104.12	0.00/9.64	6.88/88.58	2069.32/2020.11	8040.19/7788.45
100×20	0.00/4.00	7.40/90.90	0.00/4.00	7.10/89.20	1916.11/1911.17	8059.30/8036.42
130×20	0.00/3.09	4.00/68.42	0.00/3.09	4.00/68.41	1876.49/1876.49	8060.76/8060.76

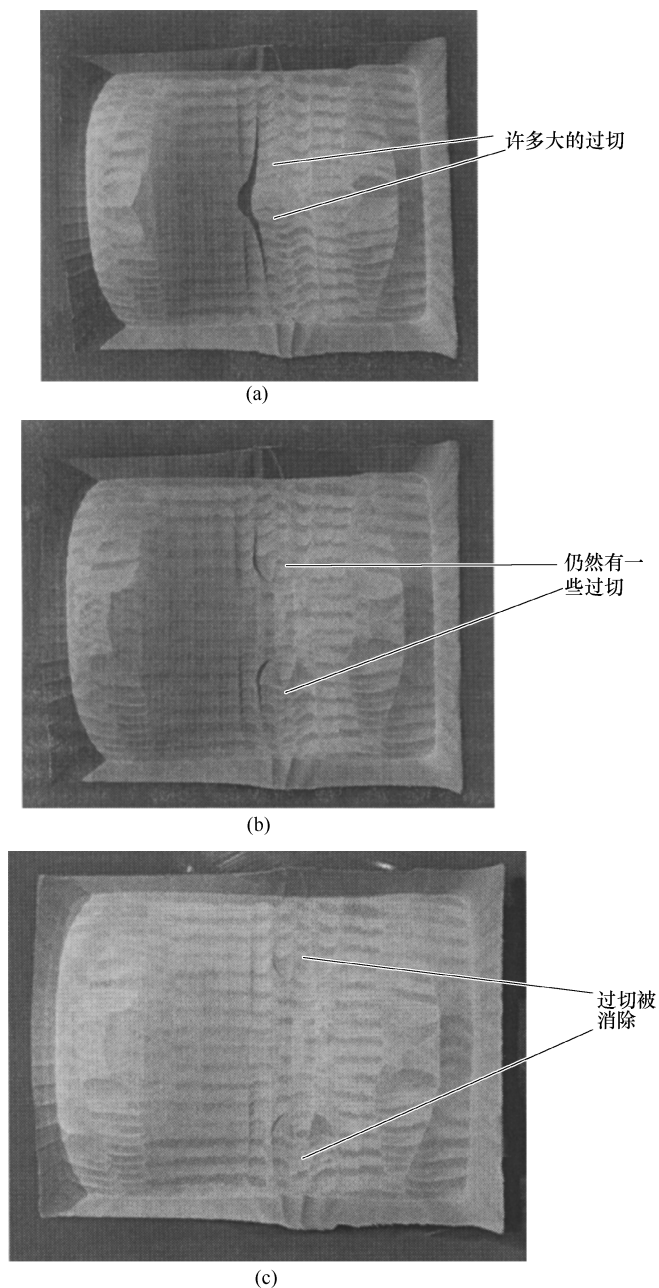


图 6.15 对应于图 6.14 中刀具路径优化后的表面

(a) 在 MAHO 600E 上 S_2 表面没有优化 (对应于图 6.14a)

(b) 在 MAHO 600E 上 S_2 表面的总误差优化后 (对应于图 6.14b)

(c) 在 MAHO 600E 上 S_2 表面关于过切误差的刀具路径优化后 (对应于图 6.14c)

6.5 均匀角网格

本节介绍了一种插入局部均匀角网格的方法,通过这种方法可以产生总角度的减少甚至最小化。许多计算所谓的进给率(连续 CL 点之间的步骤)的算法已被提出。最简单的方法是使沿着刀具路径使表面线性化,计算误差和插入额外的点,直到误差在规定的公差内(见文献[5])。另一种方法是对要求的轨迹用样条或 NURBS 插值,并利用曲线的属性建立所需的进给率。进给速度可能取决于曲线的空间坐标以及角度变化(可参见文献[13])。结合实际机床运动学与由 Lo^[6]提出的插值方法,一个总的框架在第5章的参考文献[7]和[8]中提出,应用网格生成对刀具路径进行优化。特别是网格生成基于 Dirichlet 函数,在一个迭代循环中用前处理调用,可大大减少运动误差。当网格单元 A 趋近于零时,若 $\varepsilon \rightarrow 0$,网格生成是可应用的。如果情况属实,就可引入一个函数表示所谓的平均分布原则^[8]并且受到机床约束。

现在我们将考虑不同的粗切削情况,当刀具旋转角度像前面提及的那样增长。在这种情况下,适应性网格可能需要很小的空间单元。因此,该算法可能会造成扭曲和退化的单元,这可能导致不收敛或收敛非常缓慢。

假设我们已经构建了一个“基本”刀具路径,表示第5章所述的矩形或曲线网格。假设我们允许“注入”一定数量的附加点以减少误差。在哪里和如何插入这些点?在大角度变化的点周围,让我们采用相等角度增量的局部网格,我们称这样的网格为均匀角网格。

回想一下,在驻点附近常常存在一个区域,在此区域内一个旋转轴不动或一个角度的变化速度比另一个角度快。在这种情况下,就足以只对变化快的角度建立一个均匀网格。

该算法包括以下步骤:首先,检测剧烈角度变化点;然后,对于每个点,算法决定在这些点之间应该建立均匀角网格的位置。通常,这个范围包括生成运动回路的奇点前后的几个刀具位置。每对所选点

W_p 和 W_{p+1} 之间的空间必须细分, 使得每一个 $[i, i+1]$ 区间中 $\Delta a_{p,p+1,i,i+1} \approx \text{常数}$ 或 $\Delta b_{p,p+1,i,i+1} \approx \text{常数}$ 。

我们已经注意到, 驻点是由急剧变化第一或第二旋转角度切削而成的。不管这个奇异点是否是 CC 点, 刀具沿着“围绕顶点”还是“穿过顶点”路径切削取决于旋转角度的选择。所以, 这个算法选择合适的角度 (角度 a) 和把角间隔 $\Delta a_{p,p+1}$ 用相等子区间 $\Delta a_{p,p+1,i,i+1}$ 细分, 从而使 $a_{p,p+1,i} = a_p + \Delta_{p,p+1} i$ 。这里, $\Delta_{p,p+1}$ 是步长。从以下表面方程中可以发现相应的空间位置 s_i : 首先, 我们指定了一个通过驻点的表面参数空间曲线 $T = T(s)$; 然后, 对每个 i 求出了数值解 $a(T(s)) = a_{p,p+1}$ 。这里, $a(T(s))$ 表示在空间曲线 $T(s)$ 上通过表面法线计算出的旋转角度。

6.6 均匀角网格的数值和加工试验

1. 试验

在 MAHO 600E 机床上加工表面 S_2 。为了减少误差, 我们可以“插入”其他的点。首先, 使用等参数刀具路径的加工表面表现局部角网格 (见图 6.16a)。由于急剧的角度变化出现的大误差环状路径, 可以通过插入额外的点使角均匀分布来消除 (见图 6.16b)。在较大的误差环内只要插入 8 个点, 就可以实现误差的大幅度减少 (50 倍)!

似乎插入等间隔的点集可以得到相似甚至相同的结果, 然而情况并非如此。点的空间均匀分布对误差没有显著影响。通过插入 8 个点把误差仅仅减少了 4 倍。表 6.4 所示为点插入前后的运动学误差和旋转角度。显然, 均匀角网格可以充分地减少误差, 然而常规的网格是无效的。

不管怎样, 当插入大量的额外点时, 对空间或角网格插入误差的减少大致相同。因此, 这种方式适用于旋转角度急剧变化的粗切削。图 6.16b 和 6.16c 说明了角网格的优势。显然, 尽管幅度已经减小了, 常规均匀网格仍不能删除运动学误差环。与常规均匀网格截然相反的

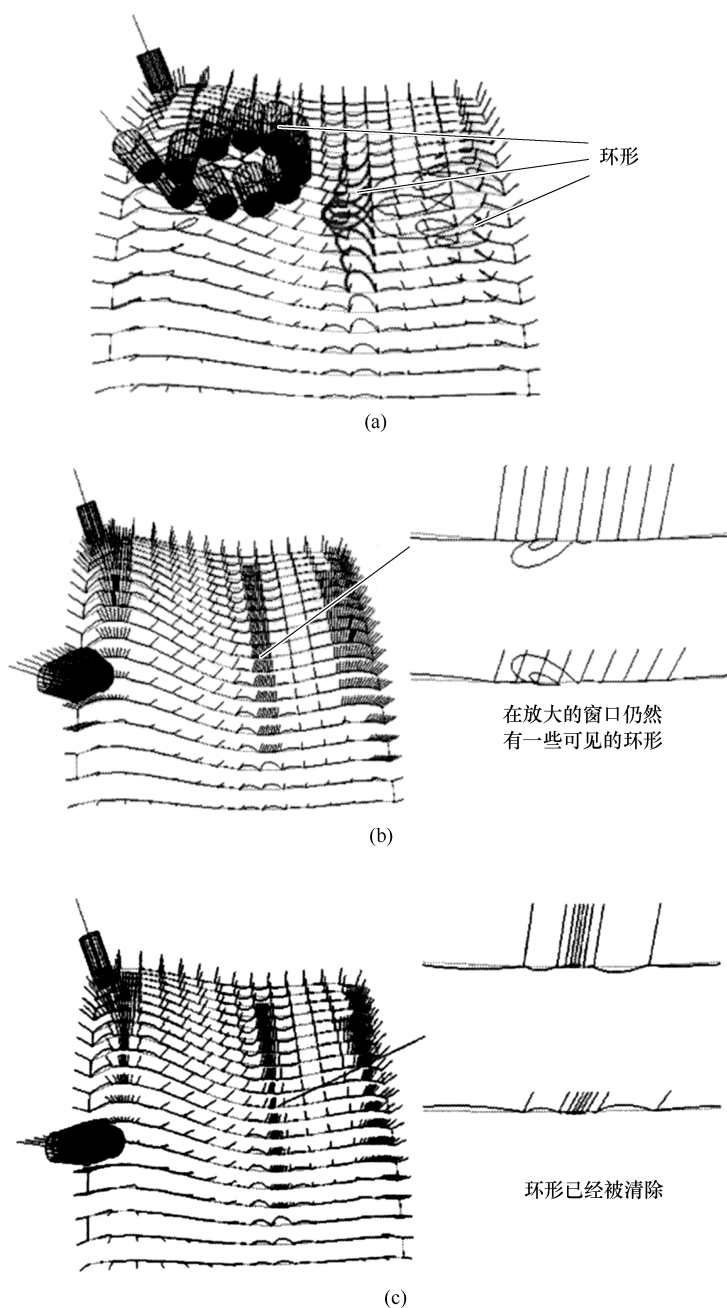


图 6.16 在 MAHO 600E 机床上 S_2 表面插入常规网格和角网格
 (a) 在 MAHO 600E 机床上 S_2 表面插入网格前的刀具路径和刀具方向
 (b) 在 MAHO 600E 机床上 S_2 表面插入常规网格的刀具路径和刀具方向
 (c) 在 MAHO 600E 机床上 S_2 表面插入角网格的刀具路径和刀具方向

是，角网格通过消除环形改变轨迹动向。图 6.17 显示了使用常规网格和角网格技术加工工件的不同。

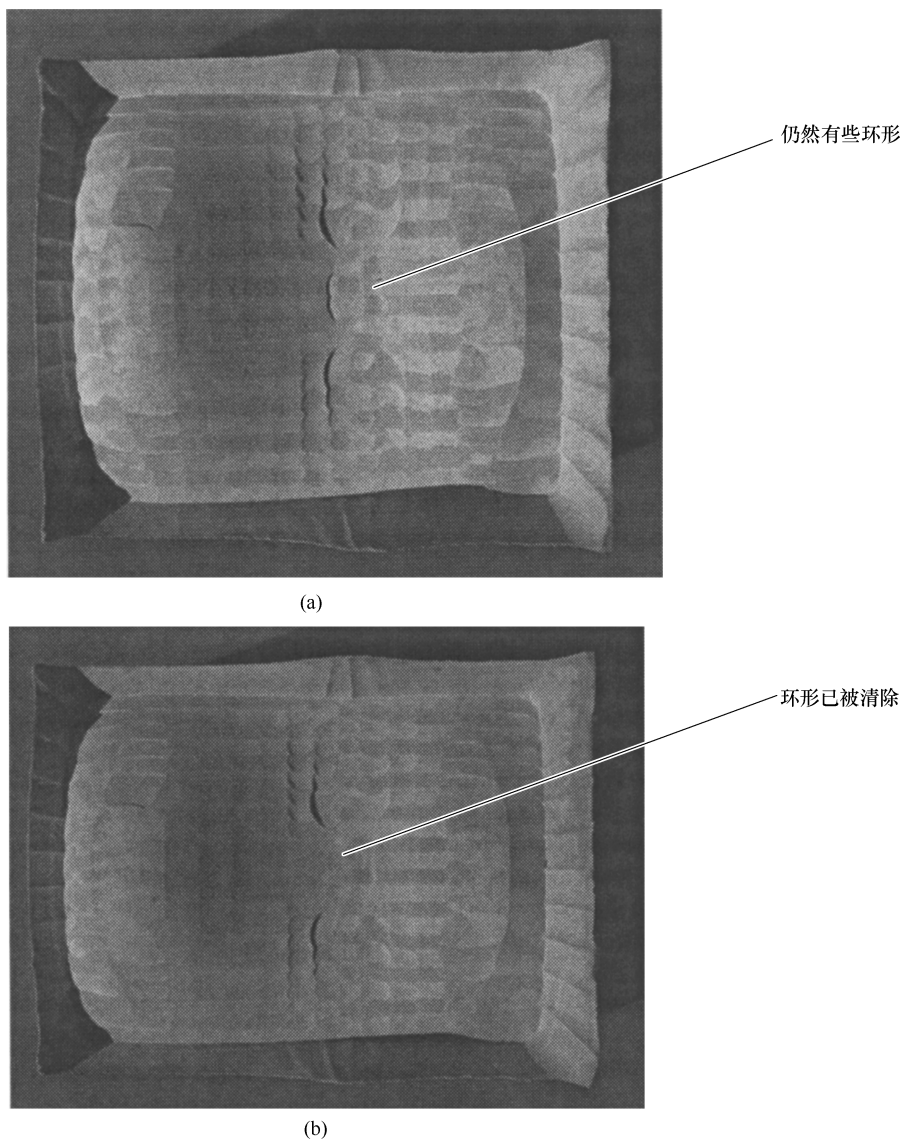


图 6.17 使用常规网格和角网格技术加工工件的不同

- (a) 在 MAHO 600E 上 S_2 的空间网格 (对应于图 6.16b)
 (b) 在 MAHO 600E 上为 S_2 插入角网格 (对应于图 6.16c)

表 6.4 点插入前后的运动学误差和旋转角度 (基本网格尺寸 15×20)

插入点的数量	常规网格/角网格运动学误差 的最大误差/mm	常规网格/均匀角网格旋转角度 的最大误差/ (°)
0	19.300/19.300	162.202/162.202
8	4.241/0.416	68.660/20.631
16	1.707/0.138	43.016/10.629
32	0.490/0.092	20.647/5.352
64	0.158/0.089	10.955/2.680
128	0.099/0.089	5.378/1.340

由于平头立铣刀的快速普及,使用其完成切削试验,尤其适用于急剧角度变化时的粗铣。角网格适用于经常用来进行精加工的球头铣刀。事实上,该算法可以不需重大修改适用于 APT 工具(自动编程工具)。APT 刀具包括几种最常用的刀具形状,如平头立铣刀、环形铣刀、球头铣刀等。

结合前面提出的两种角网格的构建方法可以得到更好的优化结果。不过在通常情况下,在应用最短路径过程或在下面提出的迭代循环之前,应该构建角网格。即使角网格适用于最短常规路径,事实上并不像看起来那样直接。当构建角网格时,在最短路径优化后要求追踪与每个点有关系的变更。此外,运用角网格后的最佳序列往往是不合理的,因为对最短路径的优化时,即使插入一个点,也有可能创建一个完全不同的图形。

让我们举例说明这种情况。在优化排序之后,考虑获得表面 S_2 的刀具路径。在表面右边的点 141 和 142 之间最大的环不能通过优化排序被处理(见图 6.18)。在应用算法之前,角度为 $a_{141} = 319^\circ$, $b_{141} = -79^\circ$, $a_{142} = 224^\circ$, $b_{142} = -80^\circ$ 。经过最短路径优化后, $a_{141} = 319^\circ$, $b_{141} = -79^\circ$, $a_{142, new} = a_{142} + 180^\circ = 404^\circ$, $b_{142, new} = -b_{142} - 180^\circ = -100^\circ$ 。在环中插入一个点,则 $a_{mid} = 267^\circ$, $b_{mid} = -82^\circ$ 。

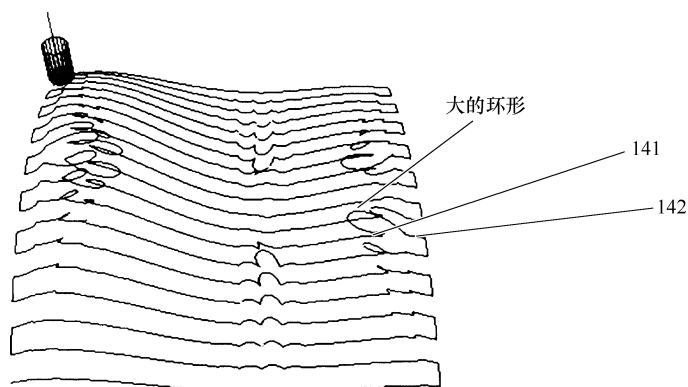


图 6.18 优化排序后在 MAHO 600E 机床上表面 S_2 的刀具路径

根据“历史”，我们对角度做出以下修改： $a_{mid} = a_{mid} + 180^\circ = 447^\circ$ ， $b_{mid} = -b_{mid} - 180^\circ = -98^\circ$ ，因此产生在图 6.19 中描述的一个大环。注意： $a_{mid} \notin [a_{141}, a_{142}]$ 。换句话说，额外点已经破坏了最短路径。由于最短路径的剩余部分取决于这些角度，全部路径已经被破坏，优化应该重新执行一次。

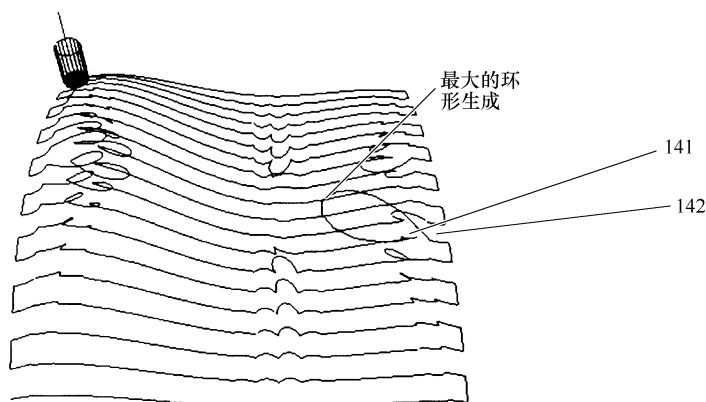


图 6.19 在 MAHO 600E 机床上优化排序后并且在最大的环中插入一个点的刀具路径

最终，除了机床运动外，由于刀具路径方向的频繁变动，加工精度也会经常受到刀具的加速度和减速度的影响。因为这种现象经常发生在旋转角度急剧变化的区域，让我们讨论关于加速度误差所提出的

方法。

为了减少加速度误差，整个刀具路径通常被视为关于连续两个参考点之间弦长的参数化插值曲线。通过弦长增量生成刀具位置，由于弦长和弧长的不同，导致进给速度不稳定。这种不稳定引起不良加速和急速波动（见第1章内插文献）。

本方法适用于大部分误差来源于角度多变的区域。然而，本方法不能明确地处理加速问题。因此，当这样的加速度引发比较大的误差时，该算法应该结合上述样条插值方法。然而，请注意角变化的减少导致角空间的相等的增加。因此，由于刀具方向的急剧变化，可以减少角加速度出现在五轴联动模式中。

理想情况下，在五轴加工中的刀具路径肯定被认为成一条在五维空间中的曲线和在五维空间中针对弧长的参数化。这样的参数化应该和几个误差来源有关，如运动学误差、加速度产生的误差等。不幸的是，这样的参数化仍然是一个开放性问题。

2. APT 刀具

APT 刀具表面（见图 6.20）是由截头圆锥体、圆环和下锥体组成：

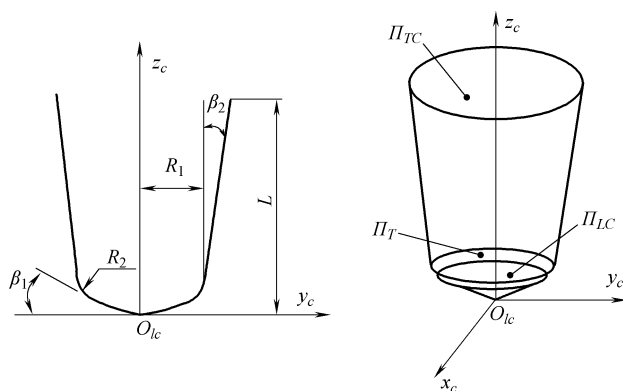


图 6.20 APT 刀具表面

$$\Pi_C = \Pi_{TC} \cup \Pi_T \cup \Pi_{LC}$$

其中

$$\Pi_{TC} = \begin{pmatrix} (R_1 + t \tan \beta_2) \sin \gamma \\ (R_1 + t \tan \beta_2) \cos \gamma \\ t + h - R_2 \sin \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \in [0, 2\pi], t \in [h - R_2 \sin \beta_2, L],$$

$$h = R_2 \cos \beta_1 + R_2 \cos \beta_1 \tan \beta_1 + R_1 \tan \beta_1 - R_2 \tan \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$\Pi_T = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} (e + R_2 \sin \chi) \sin \gamma \\ (e + R_2 \sin \chi) \cos \gamma \\ h - R_2 \cos \chi \end{pmatrix},$$

$$\chi \in \left[\beta_1, \frac{\pi}{2} - \beta_2 \right], e = R_1 - R_2 \cos \beta_2,$$

$$\Pi_{LC} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} t \cot \beta_1 \sin \gamma \\ t \cot \beta_1 \sin \gamma \\ t \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, h - R_2 \cos \beta_1].$$

至于特定圆角立铣刀, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 。当 $R_2 = 0$, 平头立铣刀是圆角立铣刀的一种特殊情况。

参 考 文 献

- [1] Affouard, A., Duc, E., Lartigue, C., Langeron, J.-M., and Bourdet, P. 2004. Avoiding 5-axis singularities using tool path deformation. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(4):415–425.
- [2] Arkin, E. M., Bender, M. A., Demaine, E. D., Fekete, S. P., Mitchell, J. S. B., and Sethia, S. 2001. Optimal covering tours with turn costs. In *Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2001)*, pages 138–147.
- [3] Arkin, E. M., Bender, M. A., Demaine, E. D., Fekete, S. P., Mitchell, J. S. B., and Sethia, S. 2005. Optimal covering tours with turn costs. *SIAM Journal on Computing*, 35(3):531–566.
- [4] Jung, Y. H., Lee, D. W., Kim, J. S., and Mok, H. S. 2002. NC postprocessor for 5-axis milling machine of table-rotating/tilting type. *Journal of Materials Processing Technology*, 130-131:641–646.

- [5] Li, F., Wang, X. C., Ghosh, S. K., Kong, D. Z., Lai, T. Q., and Wu, X. T. 1995. Tool-path generation for machining sculptured surface. *Journal of Materials Processing Technology*, 48(1):811–816.
- [6] Lo, C. C. 1999. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter. *Computer-Aided Design*, 31(9):557–566.
- [7] Makhanov, S. S., Batanov, D., Bohez, E., Sonthipaumpoon, K., Anontaiapaiboon, W., and Tabucanon, M. 2002. On the tool-path optimization of a milling robot. *Computers & Industrial Engineering*, 43(3):455–472.
- [8] Makhanov, S. S. and Ivanenko, S. A. 2003. Grid generation as applied to optimize cutting operations of the five-axis milling machine. *Applied Numerical Mathematics*, 46(3-4):331–351.
- [9] Makhanov, S. S. and Munlin, M. Optimal sequencing of rotation angles for five-axis machining. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. in press.
- [10] Marchuk, G. I. 1982. *Methods of Numerical Mathematics*. Springer, New York.
- [11] Munlin, M.-A., Makhanov, S. S., and Bohez, E. L. J. 2004. Optimization of rotations of a five-axis milling machine near stationary points. *Computer-Aided Design*, 36(12):1117–1128.
- [12] Weiss, M. A. 1993. *Data structures and algorithm analysis in C*. Benjamin-Cummings Publishing Co., Inc., Redwood City, CA, USA.
- [13] Xu, H.-Y. 2003. Linear and angular feedrate interpolation for planar implicit curves. *Computer-Aided Design*, 35(3):301–317.

第 7 章 五轴数控加工理论的最佳设置

7.1 引言

在五轴加工中，由于机床运动的非线性而导致的前向步进（运动学）误差，明显影响着加工表面质量。用一个简单的方法可用来减少两个 CC 点之间的运动学误差，即插入足够的点。但是这种方法往往是低效的，尤其是在高速铣削路径中，刀具路径含有大量的点，通过放慢铣削过程来减少误差，效果并不好。第 6 章中提出的角度变化技术也可以用来减少运动学错误而不用插入额外的点。然而，使用这个角度调整方法后的误差仍然存在，超过规定的公差，使用更多的点或使用另一种减小误差的方法是必需的。

可以看出，初始工件的安装以及参数的设定都跟机床的配置有关，例如旋转中心的位置和刀具的长度都会因为机床的运动而影响加工误差。对于初始化设置的分析，目前还没有商业化的 CAD / CAM 软件工具具有这一功能，如 Unigraphics、Edgecam 和 Vericut 等。然而在学术文献中，一些研究人员已经解决了这个问题。Jung 等人^[3]提出了一个通用的五轴后处理程序，但尚未提出优化的可能性。Sijie 等人^[6]优化毛坯位置和方向与 CAD 建模表面的相对方向，但机床的相关参数未优化。五轴配置的概述和分析在文献 [2, 7, 8] 中给出。然而，优化特定的表面加工设置却被忽视了。

本章提出了一种新的优化模型，以尽量最小化五轴运动在铣床初始安装设置时的错误。初始安装设置包括工件相对于工作台的位置和方向以及可能还包括机器的配置。根据机床的类型（见 2.3 节的机床

分类), 一些参数对机床运动学不产生影响, 这些参数被称为不变的参数 (见 7.2.1 节)。此外, 每个类型的机床有一些需要进行优化的因变量 (见 7.3.2 节)。在确定变量和因变量后, 可以构造相应的非线性方程组并进行数值求解。

出于演示的目的, 将初始设置的最优化达到的精度与通过使用一个“标准”的工件的定位精度相比较, 后者在零件毛坯的底部与安装工作之前台留有一定的距离, 以避免碰撞。该工件的中心放置在安装台的中心, 并且工件坐标系的 z 轴垂直于工作台。

下面介绍的例子表明, 优化非常有效。在工件坐标中, W_1 和 W_2 是两个连续的空间刀尖 (CC 点) 的位置, I_1 和 I_2 是相应的刀具方向。 W_1 和 W_2 之间的实际刀具轨迹由于机床的运动学非线性特性而呈现非线性, 它也取决于在初始工件相对于工作台的位置和方向。图 7.1 所示为两种不同的初始工件设置。在图 7.1b 中工件的方向是由 7.1a 中绕 z_1 轴旋转 r_a 获得的, 然后绕 y_1 轴旋转 r_b 。最后由 T_{12} 进行移动。

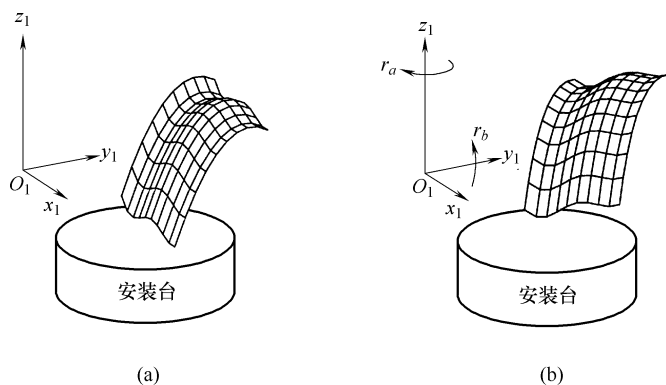


图 7.1 两种不同的初始工件设置

(a) 工件设置一 (b) 工件设置二

新的工件设置改变了刀具接触点和刀具的方向如下:

$$\begin{aligned} W'_p &= R_b[r_b] R_a[r_a] W_p + T_{12} \\ I'_p &= R_b[r_b] R_a[r_a] I_p \end{aligned} \quad (7.1)$$

其中, R_a 和 R_b 是相应于 r_a 和 r_b 旋转矩阵。图 7.2 说明了工件设置

对刀具实际轨迹的影响。令人惊讶的是针对图 7.2c 中的设置, 刀具轨迹的 $W_{12}^D(t)$ 和实际刀具轨迹的 $W_{12}(t)$ 之间的误差已经减少了一千倍 (最佳设置的误差为 0.03mm)。这种误差的减少不能通过单独的调整角度的方法来获得 (见 3.4 节和图 3.8)。

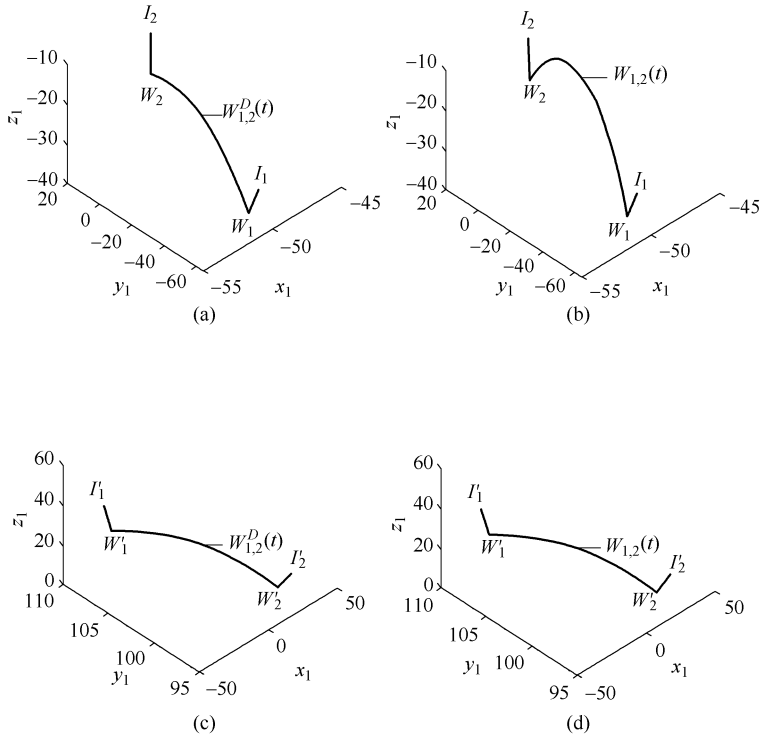


图 7.2 工件对刀具实际轨迹的影响

(a) 所需刀具轨迹 (b) 优化前的实际刀具轨迹 (c) 所需刀具轨迹
(d) 优化设置后的实际刀具轨迹

(工件绕 z_1 轴旋转 99.23° , 绕 y_1 轴旋转 41.28° 并移动 $[21.47\ 49.33\ 33.67]$ mm)

在最佳设置中要求的刀具轨迹和实际刀具轨迹几乎重合, 错误已减少 99.9%

在一般情况下, 优化参数 M (见图 2.4 ~ 图 2.6):

1) 工件安装的 $M_s = \{T_{12}, r_a, r_b\}$ 。其中, $T_{12} = (T_{12,x}, T_{12,y}, T_{12,z})$ 是工件坐标系原点相对于 O_2 (第一个旋转工作台坐标系) 的位置坐

标; r_a 和 r_b 是相对于工件的初始方向旋转的角度。

2) 机器设计 $M_T = \{T_{23}, T_{34}, T_4\}$ 。其中, $T_{23} = (T_{23,x}, T_{34,y}, T_{34,z})$ 表示第一个旋转工作台的原点在第二个旋转工作台中的位置; $T_{34} = (T_{34,x}, T_{34,y}, T_{34,z})$ 表示第二个旋转工作台的原点在主轴坐标系中的位置; T_4 是一个矢量, 描述的刀具长度。需要注意的是, 刀具长度 L 在 T_4 中是 $(0, 0, L)$ 还是 $(0, 0, -L)$ 取决于主轴坐标系中的刀尖的位置。

考虑以下的优化问题:

$$\min_M \varepsilon \quad (7.2)$$

其中, ε 是运动学误差, 定义为所需的刀尖的要求轨迹与实际轨迹之间的差异。 $M = \{M_s, M_T\}$ 包含上述 12 个参数。可以证明, 在 12 个参数中只有 6 个参数需要考虑, 因为剩下的 6 个参数对运动学误差没有任何影响。被忽略的这 6 个参数取决于五轴铣削机的类型 (见 2.3 节)。这 6 个参数选择如下: 首先, 每个类型的机床, 一些设置参数在所有的刀具轨迹中没有影响。这些参数可以立即排除; 然后, 为每个类型的机床额外设置一系列因变量参数, 当独立操作时, 这些参数不影响刀具轨迹, 每个都可以由其他参数的线性组合取代, 所以这些线性相关参数也可以被忽略; 最后, 排除不变参数和线性相关因变量之后产生一个非线性方程组, 可以由牛顿—拉夫森过程数值方程来解决。

该方程组的解决决定一个特定的机床和所需的表面, 不仅是工件安装于工作台的最佳位置和方向, 也是五轴机床的最优初始配置。正如前面提到的, 该方法已被证明在许多情况下非常有效。此外, 它只需要操作者简单地改变一下初始设置, 成本几乎为零的操作。

7.2 刀具轨迹分析

本节介绍三种类型的五轴机床的刀尖轨迹的理论分析。首先, 识

别出不影响刀具轨迹的参数。在优化过程中, 这些参数将被排除在外。下一步, 介绍初始工作设置对刀具轨迹的影响。

7.2.1 不变的参数

五轴机床的特点是非线性运动学, 由两个额外的自由度控制刀具方向。在一般情况下, 刀尖的运动轨迹是非线性的。一般机床运动的刀尖轨迹的闭合形式表达详见公式 (3.48)。在五轴机床的三种类型的每一种类型中 (见 2.3 节), 也有一些参数对刀具轨迹没有效果。这些参数由以下定理确定。

(1) 定理 7.1 2-0 机器的运动学意味着相对于 T_{34}^* 和 $T_{23,y}$ 在任意两点之间的刀具轨迹是不变的。

证明: 用 A 表示 $A[a(t)]$, 用 B 表示 $B[b(t)]$, 用 A_p 表示 $A[a_p]$, 用 B_p 表示 $B[b_p]$ 。 $R^{-1}(W) = GB\hat{R}^{-1}(W) + T_{34}^*$, 其中 $\hat{R}^{-1}(W) = A(W + T_{12}) + T_{23}$ [见式 (2.5)]。刀具轨迹公式 (3.47) 如下:

$$W_{p,p+1}(t) = R(tGB_{p+1}\hat{R}_{p+1}^{-1} + tT_{34}^* + (1-t)GB_p\hat{R}_p^{-1} + (1-t)T_{34}^*) \quad (7.3)$$

其中, $\hat{R}_p^{-1}$ 表示 $\hat{R}^{-1}(m, R_p, W_p)$ 。显然, 从式 (2.5) 可知, $W = \hat{R}(M) = A^{-1}(B^{-1}G^{-1}(M - T_{34}^*) - T_{23}) - T_{12}$ 。

考虑到 $W = R(M) = \hat{R}(S) = A^{-1}(S - T_{23}) - T_{12}$, 其中, $S = B^{-1}G^{-1}(M - T_{34}^*)$ 。将 $\hat{R}(S)$ 带入式 (7.3), 得到

$$\begin{aligned} W_{p,p+1}(t) &= \hat{R}(B^{-1}G^{-1}(tGB_{p+1}\hat{R}_{p+1}^{-1} + tT_{34}^* + (1-t)GB_p\hat{R}_p^{-1} \\ &\quad + (1-t)T_{34}^* - T_{34}^*)) \\ &= \hat{R}(tB^{-1}B_{p+1}\hat{R}_{p+1}^{-1} + (1-t)B^{-1}B_p\hat{R}_p^{-1}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

因为 $\hat{R}$ 和 $\hat{R}^{-1}$ 都不取决于 T_{34}^* , $W_{p,p+1}(t)$ 也不取决于 T_{34}^* 。因此, 刀具轨迹与 T_{34}^* 是无关的。

现在证明刀具轨迹与 $T_{23,y}$ 是无关的。将 $\hat{R}^{-1}(W) = A(W + T_{12}) + T_{23}$

和 $\hat{R}(S) = A^{-1}(S - T_{23}) - T_{12}$ 代入式 (7.4), 得

$$\begin{aligned}
 W_{p,p+1}(t) &= \hat{R}(tB^{-1}B_{p+1}\hat{R}_{p+1}^{-1} + (1-t)B^{-1}B_p\hat{R}_p^{-1}) \\
 &= \hat{R}(tB^{-1}B_{p+1}(A_{p+1}(W_{p+1} + T_{12}) + T_{23}) \\
 &\quad + (1-t)B^{-1}B_p(A_p(W_p + T_{12}) + T_{23})) \\
 &= A^{-1}(tB^{-1}B_{p+1}(A_{p+1}(W_{p+1} + T_{12}) + T_{23}) \\
 &\quad + (1-t)B^{-1}B_p(A_p(W_p + T_{12}) + T_{23}) - T_{23}) - T_{12} \\
 &= A^{-1}(tB^{-1}B_{p+1}A_{p+1}(W_{p+1} + T_{12}) \\
 &\quad + (1-t)B^{-1}B_pA_p(W_p + T_{12}) \\
 &\quad + tB^{-1}B_{p+1}T_{23} + (1-t)B^{-1}B_pT_{23} - T_{23}) - T_{12}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

在式 (7.5) 中涉及的 T_{23} 的项可以写成 $(tB^{-1}B_{p+1}T_{23} + (1-t)B^{-1}B_pT_{23} - T_{23})$ 。由于 B^{-1} 、 B_{p+1} 和 B_p 是绕 y 轴旋转, 它们不改变 T_{23} 的 y 分量。因此, $(tB^{-1}B_{p+1}T_{23} + (1-t)B^{-1}B_pT_{23} - T_{23})_y = 0$ 。所以, 刀具轨迹并不取决于 $T_{23,y}$ 。这就完成了定理的证明。

(2) 定理 7.2 1-1 机床运动学意味着该刀具轨迹是相对于 $T_{12,z}$ 、 T_{23} 和 $T_{34,y}$ 不变的。

定理 7.2 的证明过程跟定理 7.1 类似。

(3) 定理 7.3 0-2 机器运动学意味着刀具轨迹是相对于 T_{12} 和 $T_{23,y}$ 不变的。

定理 7.3 的证明过程跟定理 7.1 类似。

7.2.2 工件设定和刀具轨迹

改变工件安装 $M_S = \{T_{12}, r_a, r_b\}$ 改变刀具接触点的坐标、刀具的方向和刀具轨迹。假设工件绕 z_1 轴顺时针旋转 r_a 和绕 y_1 轴旋转 r_b (见图 7.1)。下面的定理是针对三种基本五轴机床对任意 r_a 、 r_b 的刀具轨迹的闭合形式表达。

(1) 定理 7.4 r_a 和 r_b 定义工件的方向旋转角度, R_a 和 R_b 是相应的旋转矩阵。2-0 机床运动学表示为

$$M = GB[b'] (A[a'] (W' + T_{12}) + T_{23}) + T_{34}^* \quad (7.6)$$

其中,

$$\begin{aligned} W' &= R_b[r_b] R_a[r_a] W \\ &= \begin{pmatrix} \cos(r_b) \cos(r_a) x + \cos(r_b) \sin(r_a) y - \sin(r_b) z \\ -\sin(r_a) x + \cos(r_a) y \\ \sin(r_b) \cos(r_a) x + \sin(r_b) \sin(r_a) y + \cos(r_b) z \end{pmatrix} \\ I' &= \begin{pmatrix} \cos(a - r_a) \cos(b) \cos(r_b) + \sin(b) \sin(r_b) \sin(a - r_a) \sin(r_b) \\ \cos(a - r_a) \cos(b) \sin(r_b) - \sin(b) \cos(r_b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

证明: 刀具方向 $I = (I_x, I_y, I_z)$ 和两个旋转角度 a 和 b 之间的关系如下 (见 2.4 节):

$$\begin{aligned} I_x &= \cos(a) \cos(b) \\ I_y &= \sin(a) \cos(b) \\ I_z &= -\sin(b) \end{aligned} \quad (7.7)$$

经过旋转, 刀具方向变成

$$I' = R_b[r_a] R_a[r_b] I \quad (7.8)$$

代数运算之后, 式 (7.8) 变成

$$I' = \begin{pmatrix} \cos(a - r_a) \cos(b) \cos(r_a) + \sin(b) \sin(r_b) \sin(a - r_a) \cos(b) \\ \cos(a - r_a) \cos(b) \sin(r_b) - \sin(b) \cos(r_b) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

(2) 定理 7.5 r_a 和 r_b 定义工件的方向旋转角度, R_a 和 R_b 相应的旋转矩阵。1-1 机器的运动学表示为

$$M = GA[a'] (W' + T_{12}) + T_{23} + B^{-1}[b'] T_{34}^* \quad (7.10)$$

$$\text{其中, } I' = \begin{pmatrix} \cos(a + r_a) \sin(b) \cos(r_b) - \cos(b) \sin(r_b) \\ -\sin(b) \sin(a + r_a) \\ \cos(a + r_a) \sin(b) \sin(r_b) + \cos(b) \cos(r_b) \end{pmatrix}$$

证明类似于定理 7.4。

(3) 定理 7.6 r_a 和 r_b 定义工件的方向旋转角度, R_a 和 R_b 相应的旋转矩阵。0-2 机器运动学表示为

$$M = GW' + T_{12} + A^{-1} [a'] (T_{23} + B^{-1} [b'] T_{34}^*) \quad (7.11)$$

其中,

$$I' = \begin{pmatrix} (\cos(b)\cos(r_a) - \sin(a)\sin(b)\sin(r_a))\cos(r_b) & & & \\ & -\cos(a)\sin(b)\sin(r_b) & & \\ & & -\cos(b)\sin(r_a) - \sin(a)\sin(b)\cos(r_a) & \\ & & & (\cos(a)\cos(r_a) - \sin(a)\sin(b)\sin(r_a))\sin(r_b) + \cos(a)\sin(b)\cos(r_b) \end{pmatrix}$$

证明类似于定理 7.4。

最后, 将新的旋转角度 $R'_p = (a'_p, b'_p)$ 代入式 (3.48), 得到

$$\begin{aligned} W'_{p,p+1}(t) &= R(m, tR'_{p+1} + (1-t)R'_p, \\ & tR^{-1}(m, R'_{p+1}, W'_{p+1}) + (1-t)R^{-1}(m, R'_p, W'_p)) \end{aligned} \quad (7.12)$$

其中, R 对应于式 (2.2) 或式 (2.7) 或式 (2.10)。

7.3 最小二乘法优化和因变量

这部分介绍在最小二乘法中的运动学误差的定义。最优设置被定义为一组优化参数, 以减少运动学误差。通过推导和分析一个非线性方程组, 以最小化误差。优化因变量参数被从最小化过程中排除了。最后, 为每一个类型的机床提出了优化参数的最小集合。

7.3.1 最小二乘法优化

记得, $W_{p,p+1}^D(t) \equiv (x_{p,p+1}^D(t), y_{p,p+1}^D(t), z_{p,p+1}^D(t)) \varepsilon S(u, v)$ 被定义为一条在 W_p 和 W_{p+1} 之间从表面提取的曲线, 这条曲线代表了在 Π_p 和 Π_{p+1} 之间的一个理想刀具轨迹。这个误差表示在 $W_{p,p+1}^D(t)$ 和 $W_{p,p+1}^D(t) \equiv (x_{p,p+1}(t), y_{p,p+1}(t), z_{p,p+1}(t))$ 之间的偏差, 即

$$\varepsilon = \sum_p \int_0^1 |W_{p,p+1}^D(t) - W_{p,p+1}(t)|^2 dt$$

$$= \sum_p \int_0^1 [(x_{p,p+1}^D(t) - x_{p,p+1}(t))^2 + (y_{p,p+1}^D(t) - y_{p,p+1}(t))^2 + (z_{p,p+1}^D(t) - z_{p,p+1}(t))^2] dt \quad (7.13)$$

其中

$$\begin{aligned} W_{p,p+1}(t) = & R_a^{-1}[r_a]R_b^{-1}[r_b]R(m, tR'_{p+1} + (1-t)R'_p, \\ & tR^{-1}(m, R'_{p+1}, R_b[r_b]R_a[r_a]W_{p+1}) \\ & + (1-t)R^{-1}(m, R'_p, R_b[r_b]R_a[r_a]W_p)) \end{aligned}$$

现在的最小二乘法最小化问题可以用式 (7.2) 描述。关于优化参数的微分为

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_p} = \sum_p \int_0^1 |W_{p,p+1}^D(t) - W_{p,p+1}(t)| \frac{\partial W_{p,p+1}(t)}{\partial v_p} dt = 0 \quad (7.14)$$

其中, $v = (v_1, \dots, v_2)$ 是由一组优化参数组成的矢量。参数的个数 n 最多不超过 6 个, 但如果最优化仅仅是针对机床设置方面, 参数的个数是随着机床类型的变化而变化。

7.3.2 因变量

我们现在分析因变量。以 2-0 机器为例, 注意 $T_{34} - T_4$ 已经被变量 T_{34}^* 代替 (见 2.4 节)。因此, 如果 $T_{34}^* = T_{34,o}^*$ 是解决转化的优化问题的分量, 任何满足式子 $T_{34} - T_4 = T_{34}^*$ 的 T_{34} 和 T_4 是解决原优化问题的分量, 依据成本函数, 相依性表示如下: 当 $\mathcal{E}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = \hat{\mathcal{E}}(c_1 v_1 + c_2 v_2, v_3, \dots, v_n)$, v_1 和 v_2 相互影响的, 其中, c_1 、 c_2 是常数。在这个例子中, $\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial v_1} = 0$ 和 $\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial v_2} = 0$ 产生同样的方程。因此, $c_1 v_1 + c_2 v_2$ 可以被一个变量代替。当转化问题的最优解被发现时, 无论是 v_1 还是 v_2 被认为是一个自由变量。

相依性的定义可以很容易地推广到 n 个因变量的情况。可以确定, 针对式 (2.2) 中的运动所建立的式 (7.13) 有一对额外的、不那么明显的因变量。

(1) 定理 7.7 在 2-0 机器中, $T_{12,z}$ 和 $T_{23,z}$ 是线性相关的。

证明：假设刀具轨迹由下式给定

$W_{p,p+1}(t) = \hat{R} [tB^{-1}B_{p+1}\hat{R}_{p+1}^{-1} + (1-t)B^{-1}B_p\hat{R}_p^{-1}]$, $\hat{R}_p^{-1} = A_p(W_p + T_{12}) + T_{23}$ [见定理 7.4]。

由于 A_p 和 A_{p+1} 绕 z 轴旋转, 不会改变 T_{12} 的 z 轴分量。所以 $(A_p T_{12} + T_{23})_z = (A_{p+1} T_{12} + T_{23})_z = T_{12,z} + T_{23,z}$ 。因此, $(A_p T_{12} + T_{23})_z$ 和 $(A_{p+1} T_{12} + T_{23})_z$ 能用一个变量代替。而且, 因为 $\hat{R}(S) = A^{-1}(S - T_{23}) - T_{12}$, $(A^{-1}T_{23} + T_{12})_z = T_{23,z} + T_{12,z}$ 也能被同一个变量代替。所以, $T_{12,z}$ 和 $T_{23,z}$ 是相关的。

注意, 图 7.3 列举了 $T_{12,z}$ 和 $T_{23,z}$ 的相关性 (也可以通过图 2.4 进行比较)。简单地说, $T_{12,z} + T_{23,z} = c$ (c 是工件坐标系中心 O_1 和第二旋转工作台坐标系中心 O_3 之间的距离), 相对于第二旋转工作台的最优工件的位置是固定的。然而, 安装工作台的高度沿 z_2 轴 (O_2 坐标系) 可减少或增加。

现在考虑 1-1 机床和 0-2 机床。

(2) 定理 7.8 1-1 机床的 T_{34} 和 T_4 是线性相关的。

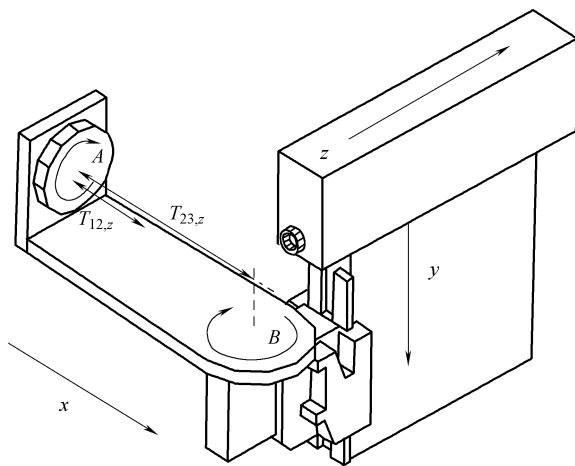


图 7.3 2-0 机器的相关参数 $T_{12,z} + T_{23,z} = c$

证明过程类似于定理 7.7。

(3) 定理 7.9 0-2 机床的 $T_{23,x}$ 和 $T_{34,x}$ 是线性相关的。

证明过程类似于定理 7.7。

本节中优化参数的最小集如表 7.1 所示。

表 7.1 优化参数的最小集

优化参数			
机床类型	工件设置	刀具长度	机床设置
2-0 机器	$r_a, r_b, T_{12,x}, T_{12,y}, T_{12,z}$	—	$T_{23,x}$
1-1 机器	$r_a, r_b, T_{12,x}, T_{12,y}$	$T_{4,z}$	$T_{34,x}$
0-2 机器	r_a, r_b	$T_{4,z}$	$T_{23,x}, T_{23,y}, T_{34,y}$

7.4 实例和讨论

7.4.1 数值计算方法

本节描述应用一个标准的牛顿—拉夫森过程求解式 (7.14) 的数值解。考虑方程组 $F(v) = 0$ ，其中， F 是一个向量函数，从式 (7.14) 推导出。许多数值方法可用于解决这个非线性方程组^[1]。其中，最简单的方法之一是标准的牛顿法

$$v^{new} = v^{old} - J^{-1}F(v^{old}) \quad (7.15)$$

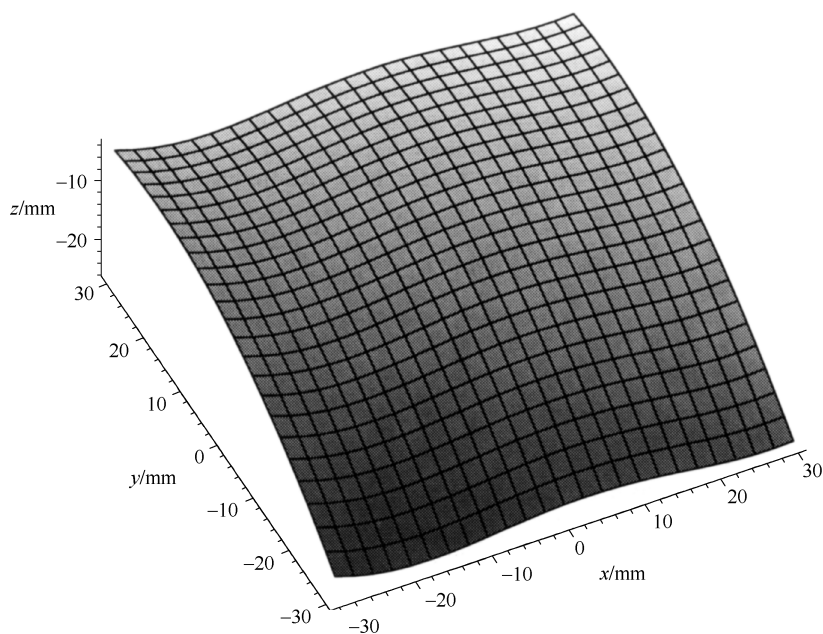
式中， J 为 Jacobi 矩阵。众所周知，牛顿方法的性能取决于初始近似值。在多个最优的情况下，这个过程可能不收敛，并可能无法获得全局最优。为了应对这些限制，牛顿法是在每次运行时使用不同的初始近似值执行几次。起始点安排在一个规则的网格，或从较可行的参数空间分布均匀采样。应用链式规则，目标函数对旋转角度的导数如下：

$$\frac{\partial \varepsilon(r_a, r_b)}{\partial r_L} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_L} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial a'_p} \frac{\partial a'_p}{\partial r_L} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial b'_p} \frac{\partial b'_p}{\partial a'_L} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial a'_{p+1}} \frac{\partial a'_{p+1}}{\partial r_L} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial b'_{p+1}} \frac{\partial b'_{p+1}}{\partial r_L} \quad (7.16)$$

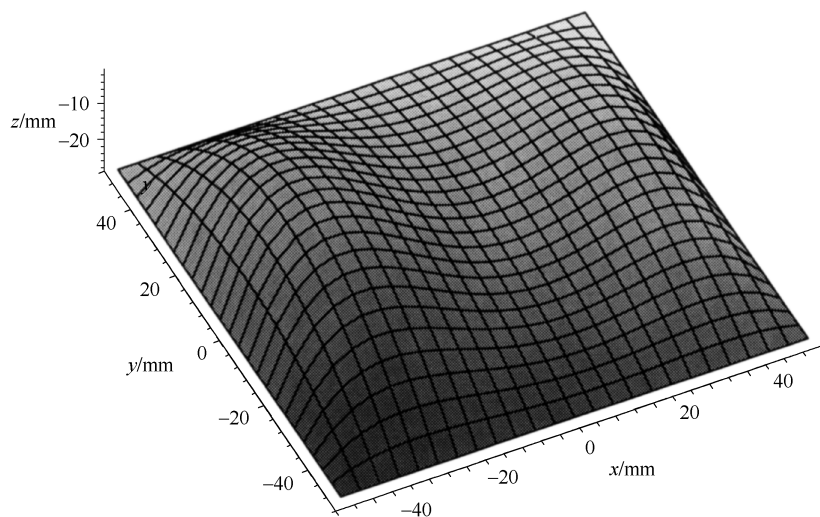
其中， $L = a$ 或 $L = b$ 。 a' 和 b' 是旋转角度，它们是 r_a 和 r_b 的函数（见定理 7.4 ~ 7.6）。下一节演示几个验证这种简单方法性能的试验。

7.4.2 实例

为了证明所提出过程的性能, 优化应用到两个测试表面: 一个扫



(a)



(b)

图 7.4 测试表面

(a) 扫描表面 (b) 双钟面

描面^[4,5]（见图 7.4a）和双钟面（见图 7.4b）。扫描表面为

$$\begin{aligned}x &= 100u - 50 \\y &= 100v - 50 \\z &= -40(v - 0.8)^2 - 50\sin(3u - 0.3)\sin(u - 0.5)\sin(u - 0.8) - 5\end{aligned}\quad (7.17)$$

双钟面为

$$\begin{aligned}x &= 100u - 50 \\y &= 100v - 50 \\z &= 400v(1 - v)(3.55u - 14.8u^2 + 21.15u^3 - 9.9u^4) - 28\end{aligned}\quad (7.18)$$

其中, $0 \leq u, v \leq 1$ 。

$W_p = S(u_p, v_p)$ 和 $W_{p+1} = S(u_{p+1}, v_{p+1})$ 是两个连续 CC 点。从表面提取的两个 CC 点之间的曲线如下:

$$W_{p,p+1}^D(t) = S((1-t)u_p + tu_{p+1}, (1-t)v_p + tv_{p+1}) \quad (7.19)$$

其中, t 是一个虚构沿曲线的时间坐标 ($0 \leq t \leq 1$)。平均误差是式 (7.13) 的近似, 为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N_{pt}} \sum_p \sum_t |W_{p,p+1}^D - W_{p,p+1}(t)|^2 \quad (7.20)$$

其中, N_{pt} 是采样点的总数。

优化的性能是由表 7.2（扫描表面）和表 7.3（双钟面）给出。

表 7.2 优化方法的性能（扫描面）

机床类型	优化之前的平均误差	针对工件设置的 优化平均误差/减少率	针对工件设置和刀具长度的 优化平均误差/减少率	针对整体的优化 平均误差/减少率
2-0 机器	0.5730mm	0.0179mm/96.88%	—	0.0176mm/96.92%
1-1 机器	0.5785mm	0.0167mm/97.12%	0.0146mm/97.47%	0.0145mm/97.49%
0-2 机器	0.0522mm	0.0396mm/24.14%	0.0273mm/47.78%	0.0160mm/69.34%

对于扫描面的要求轨迹和实际刀具轨迹连同相应的误差由图 7.5 ~ 图 7.7 给出。在初始工件坐标系中描绘刀具轨迹, 即每一个刀具轨迹从最佳设置开始, 转换到工件坐标后再进行比较。将优化的工件定位

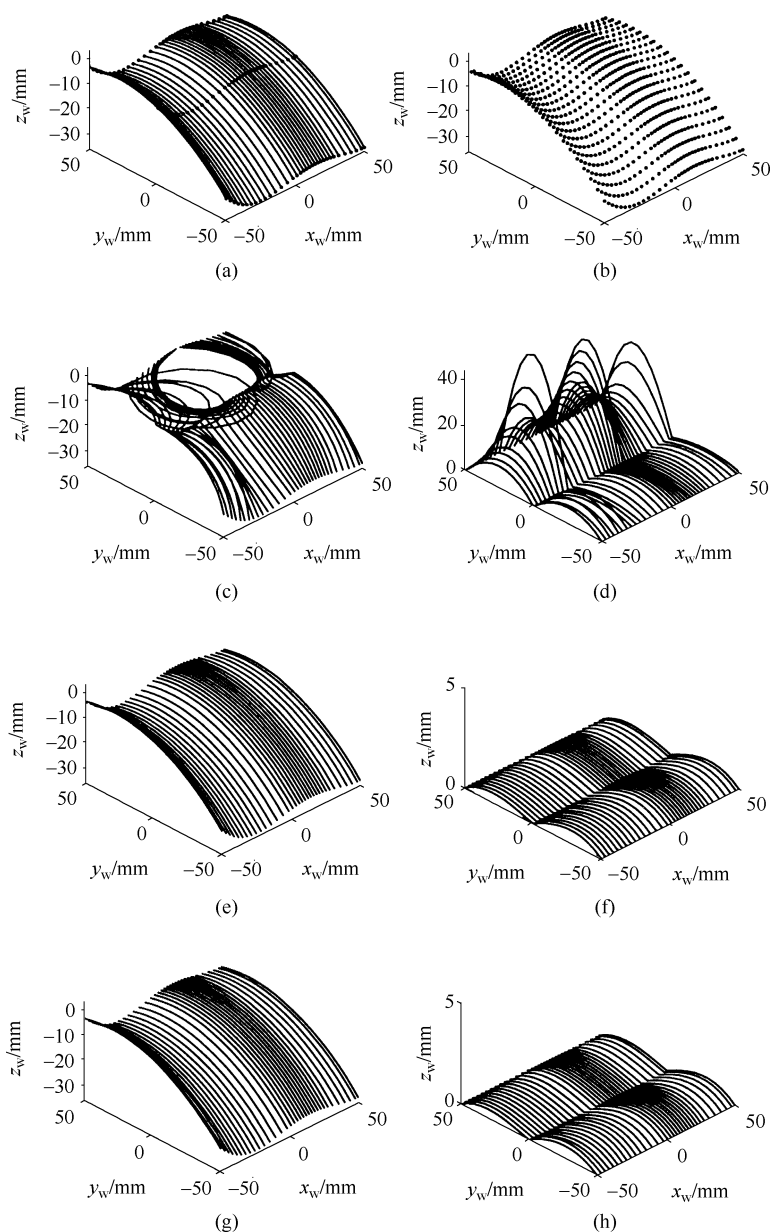


图 7.5 2-0 机床的刀具轨迹

(a) 要求刀具轨迹上的 CC 点 (b) 提取的刀具轨迹 (采样点) (c) 优化前的 2-0 机器的实际刀具轨迹 (d) 优化前的误差 (e) 最佳设置 r_a , r_b , T_{12} 的刀具轨迹 (f) 最佳设置 e 的误差 (g) 最佳设置 r_a , r_b , T_{12} , T_{23} 的刀具轨迹 (h) 最佳设置 g 的误差

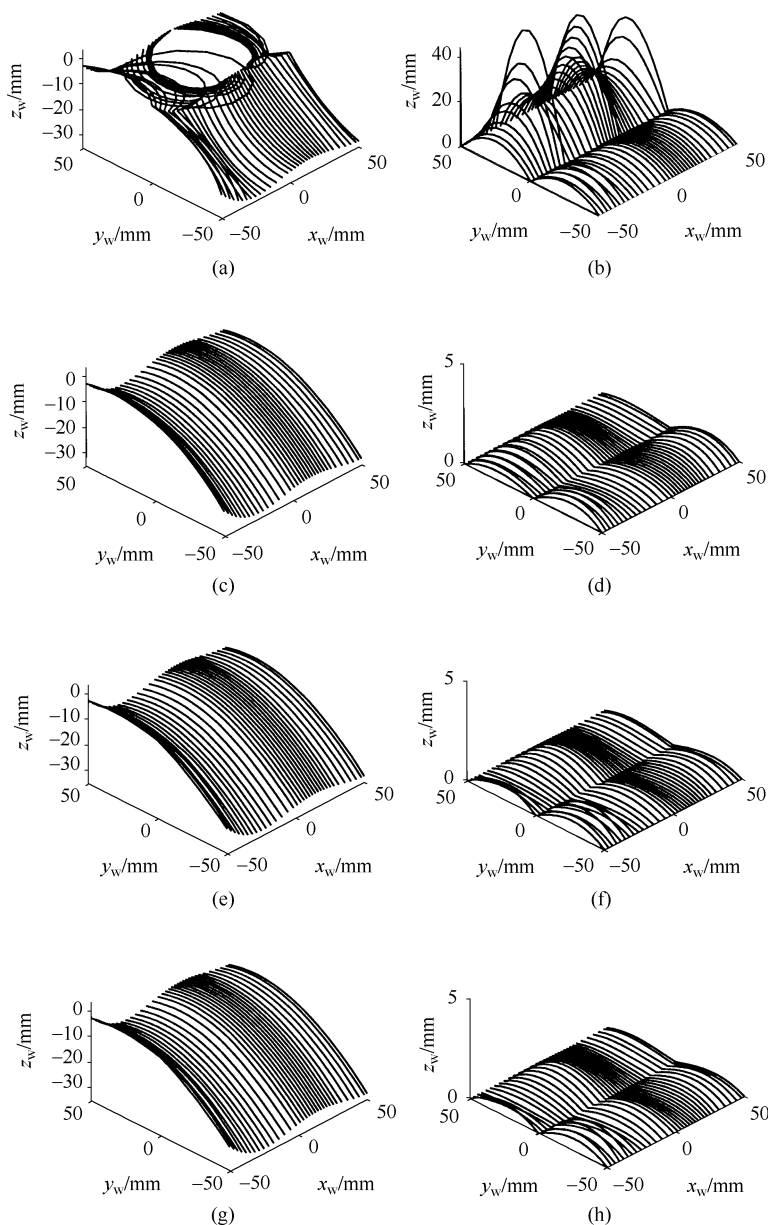


图 7.6 1-1 机床的刀具轨迹

(a) 优化前的 1-1 机床的实际刀具轨迹 (b) 优化前的刀具轨迹误差 (c) 最佳设置 r_a , r_b , T_{12} 的刀具轨迹 (d) 最佳设置 c 的误差 (e) 最佳设置 r_a , r_b , T_{12} , T_4 的刀具轨迹 (f) 最佳设置 e 的误差 (g) 最佳设置 r_a , r_b , T_{12} , T_{34} , T_4 的刀具轨迹 (h) 最佳设置 g 的误差

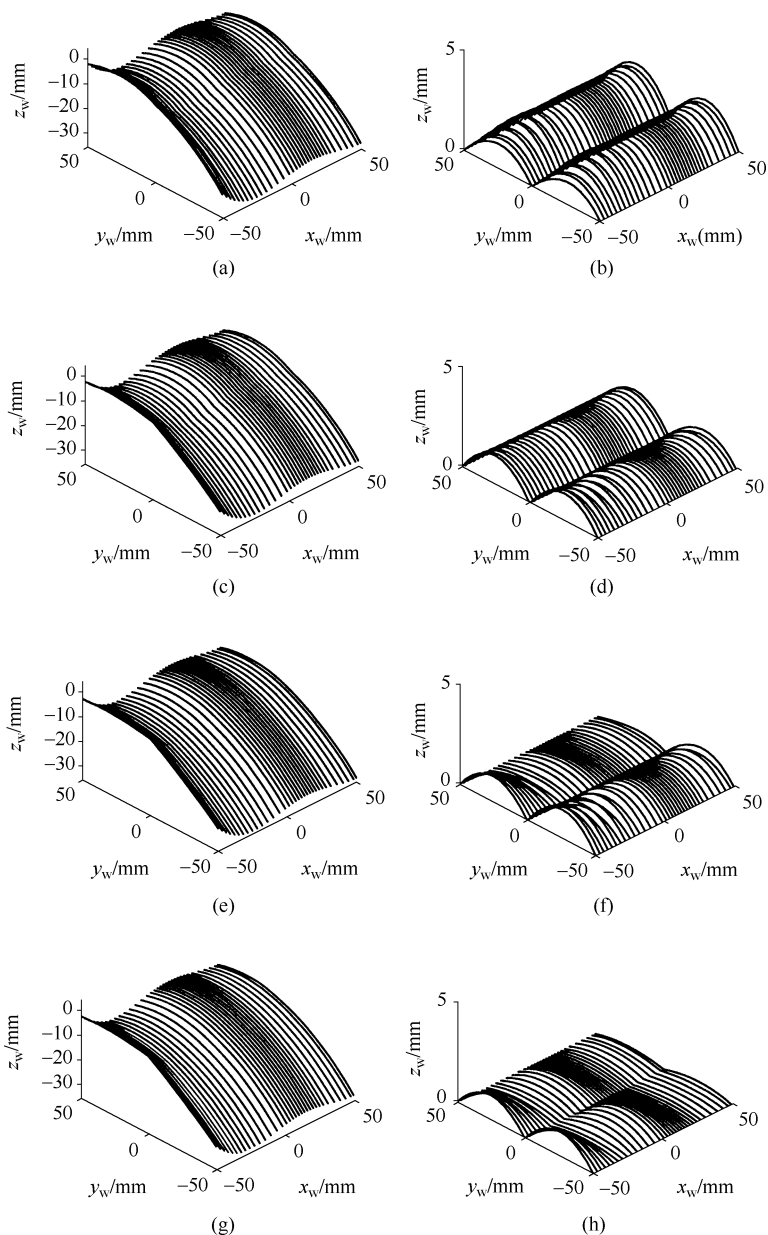


图 7.7 0-2 机床的刀具轨迹

(a) 优化前的 0-2 机床的实际刀具轨迹 (b) 优化前的刀具轨迹误差 (c) 最佳设置 r_a , r_b 的刀具轨迹 (d) 最佳设置 c 的误差 (e) 最佳设置 r_a , r_b , T_4 的刀具轨迹 (f) 最佳设置 e 的误差 (g) 最佳设置 r_a , r_b , T_{34} , T_4 的刀具轨迹 (h) 最佳设置 g 的误差

与常规的相比较，常规定位是工件坐标原点对齐安装工作台中心， z 轴垂直于安装工作台。结果表明，误差可减少高达 97%。表 7.3 显示了针对几何形状复杂的双钟面所取得的相似的精度的提高。

表 7.3 优化方法的性能（双钟面）

机床类型	优化之前的平均误差	针对工件设置的优化平均误差/减少率	针对工件设置和刀具长度的优化平均误差/减少率	针对整体的优化平均误差/减少率
2-0 机器	0.5408mm	0.1118mm/79.33%	—	0.1102mm/79.62%
1-1 机器	0.6208mm	0.5064mm/18.43%	0.2136mm/65.59%	0.2133mm/65.64%
0-2 机器	0.5564mm	0.5403mm/2.90%	0.1572mm/71.75%	0.0454mm/91.83%

图 7.8 所示为由 MAHO 600E（2-0 机床，图 2.1）产生的优化前扫描表面和优化后的扫描表面。在图 7.8d 的表面加工采用了优化的 r_a 和 r_b ，可以减少 81.45% 的错误。注意，为了更好地可视化误差，采用了极少量的 CC 点（102 点）。

评估优化性能的另一项措施是将运动学误差保持在规定的公差范围内的 CC 点的数量。这在高速铣削中特别重要。随着这些点的增加，加工时间也急剧增加。

表 7.4 显示所需的 CC 点的数量。最佳设置用于两个表面，分别减少了 68.4% 和 30% 的 CC 点的数量。请注意双钟面所取得的减少虽然不是特别大，优化仍然是适当的，因为它只要求操作者改变初始设置。这是一个简单、几乎为零成本的操作。

表 7.4 用所需 CC 点的数量衡量优化性能

表 面	CC 点的个数/减少	
	优 化 之 前	针对 r_a 和 r_b 的优化
扫描面	3900	1233/68.4%
双钟面	7925	5544/30.0%

注：对于 2-0 机器，最大的允许加工误差为 0.01mm。

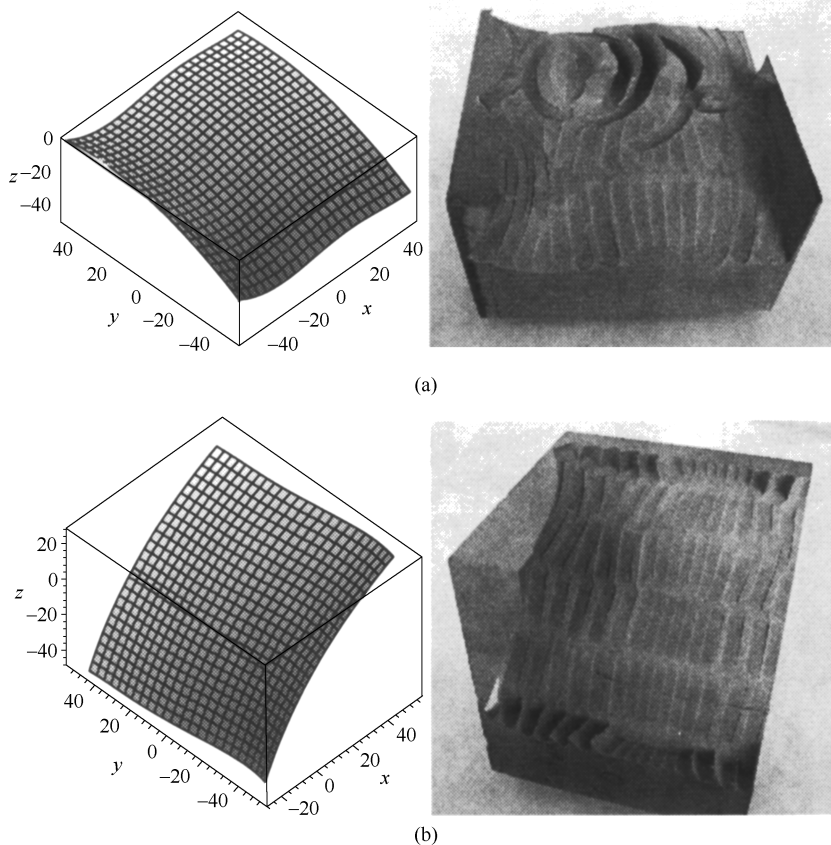


图 7.8 采用不同设置的扫描表面加工

(a) 传统设置 ($r_a = 0$, $r_b = 0$) 下已被加工的工件顶部 (b) 当 $r_a = 1.5647\text{rad}$ 与 $r_b = 0.5236\text{rad}$ 时 (关于 r_a 和 r_b 的最佳设置) 被加工的工件

参 考 文 献

- [1] Bertsekas, D. P. 1995. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, USA.
- [2] Bohez, E. L. J. 2002. Five-axis milling machine tool kinematic chain design and analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(4):505-520.
- [3] Jung, Y. H., Lee, D. W., Kim, J. S., and Mok, H. S. 2002. NC postprocessor for 5-axis milling machine of table-rotating/tilting type. *Journal of Materials Processing Technology*, 130-131:641-646.

- [4] Piegl, L. and Tiller, W. 1995. *The NURBS book*. Springer-Verlag, London, UK.
- [5] Rogers, D. F. 2001. *An introduction to NURBS: with historical perspective*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- [6] Sijie, Y., Yunfei, Z., Fangyu, P., and Xide, L. 2004. Research on the localisation of the workpieces with large sculptured surfaces in NC machining. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 23(5-6):429–435.
- [7] Tutunea-Fatan, O. R. and Feng, H.-Y. 2004. Configuration analysis of five-axis machine tools using a generic kinematic model. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(11):1235–1243.
- [8] Warkentin, A., Hoskins, P., Ismail, F., and Bedi, S. 2001. Computer-aided 5-axis machining. In *Systems Techniques and Computational Methods*, volume 1 of *Computer-Aided Design, Engineering, and Manufacturing: Systems Techniques and Applications*, chapter 3, pages 3001–3034. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA.

国际视野 科技前沿

The book presents new optimization algorithms designed to improve the efficiency of tool paths for five-axis NC machining of sculptured surfaces. The book introduces the reader to fundamental issues involved in the tool path planning such as the kinematics of five-axis machines, types of 5 axis machines, part surface representation, machining strips, optimal tool orientation, gouging avoidance and forward step error. It also introduces new methods of optimization based on research conducted by the authors, including schemes performed in the spatial domain, angular domain as well as procedures to optimize the initial setup. The book can be used by undergraduate and graduate students and researchers in the field of NC machining and CAD/CAM as well as by the corporate research groups for advanced optimization of cutting operations.

地址:北京市百万庄大街22号

邮政编码:100037

电话服务

社服务中心: 010-88361066

销售一部: 010-68326294

销售二部: 010-88379649

读者购书热线: 010-88379203

网络服务

教材网: <http://www.cmpedu.com>

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

机工微博: <http://weibo.com/cmp1952>

封面防伪标均为盗版

上架指导 机械工程 / 机械加工

ISBN 978-7-111-39928-5

策划编辑◎李万宇 / 封面设计◎鞠杨

ISBN 978-7-111-39928-5



定价: 49.00元